

Variations et extremums : cours de maths 2de à télécharger en PDF



Le livre de cours de maths 2de

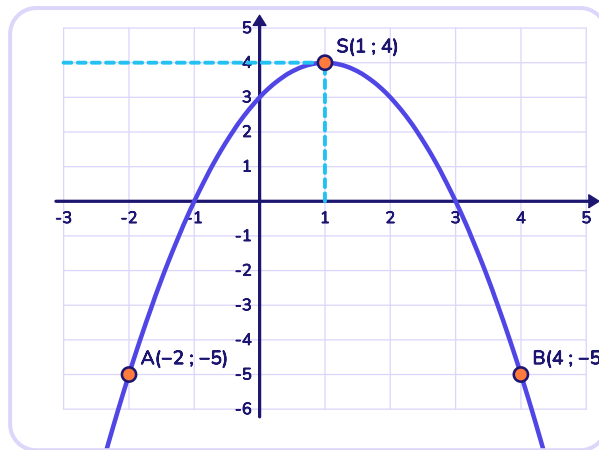
Tout le programme en un seul PDF de 99 pages, à imprimer ou à garder sur ta tablette.

[Voir le livre](#)

Un ballon lancé en l'air monte, atteint son sommet, puis redescend : sa hauteur change au fil du temps. Les fonctions aussi « montent » et « descendent ». Dans ce chapitre, tu vas apprendre à décrire ces mouvements avec précision : où une fonction augmente, où elle diminue, quelle est sa plus grande et sa plus petite valeur, comment comparer deux images sans les calculer, et pour quelles valeurs de x elle est positive.

1. Lire une courbe de gauche à droite

On étudie souvent une fonction f sur un **intervalle** I , un morceau de la droite des nombres comme $[-2; 4]$. Pour décrire sa courbe, on la parcourt **de gauche à droite**, c'est-à-dire quand x augmente, et on observe si elle monte ou si elle descend.



Cette courbe représente la fonction f définie sur $[-2; 4]$ par $f(x) = -x^2 + 2x + 3$. De A à S , elle monte ; de S à B , elle descend. Le sommet $S(1; 4)$ est l'endroit où le sens de variation change.

2. Fonction croissante, fonction décroissante

D Croissante, décroissante, constante

Soit f une fonction définie sur un intervalle I .

- f est **croissante** sur I si, pour tous réels a et b de I , $a < b$ entraîne $f(a) \leq f(b)$: elle **conserve l'ordre**.
- f est **décroissante** sur I si, pour tous réels a et b de I , $a < b$ entraîne $f(a) \geq f(b)$: elle **inverse l'ordre**.
- f est **constante** sur I si $f(a) = f(b)$ pour tous a et b de I .

Si les inégalités sont strictes ($f(a) < f(b)$ ou $f(a) > f(b)$), on dit que la fonction est **strictement** croissante ou **strictement** décroissante. Dire qu'une fonction « monte » ne suffit pas : il faut toujours préciser **sur quel intervalle**.

E

Exemple 1

Pour la fonction f de la partie 1, la courbe monte de $x = -2$ à $x = 1$ puis descend de $x = 1$ à $x = 4$. Donc f est croissante sur $[-2; 1]$ et décroissante sur $[1; 4]$.



Piège

Une fonction n'est pas « croissante » ou « décroissante » tout court : la fonction f ci-dessus est les deux, mais sur des intervalles différents. Écris toujours « croissante sur ... ».

3. Le tableau de variations

Un **tableau de variations** résume le comportement d'une fonction. La première ligne donne les valeurs de x où le sens change (et les bornes de l'intervalle), la seconde ligne donne les images correspondantes, reliées par des flèches : $\nearrow$ quand la fonction croît, $\searrow$ quand elle décroît.

M

Dresser un tableau de variations

1. Repère les bornes de l'intervalle et les points où la courbe change de sens.
2. Écris ces valeurs de x sur la première ligne, de gauche à droite.
3. Calcule ou lis l'image de chacune et place-la en haut si c'est un sommet, en bas si c'est un creux.
4. Trace les flèches entre deux valeurs consécutives.

x	-2	1	4
$f(x)$	-5	4	-5

Diagram illustrating the variation table with arrows showing the function increasing from $x = -2$ to $x = 1$ and decreasing from $x = 1$ to $x = 4$.

Ici, $f(-2) = -(-2)^2 + 2 \times (-2) + 3 = -5$, $f(1) = -1 + 2 + 3 = 4$ et $f(4) = -16 + 8 + 3 = -5$.

4. Maximum et minimum

D Maximum, minimum, extremum

Soit f définie sur I et a un réel de I .

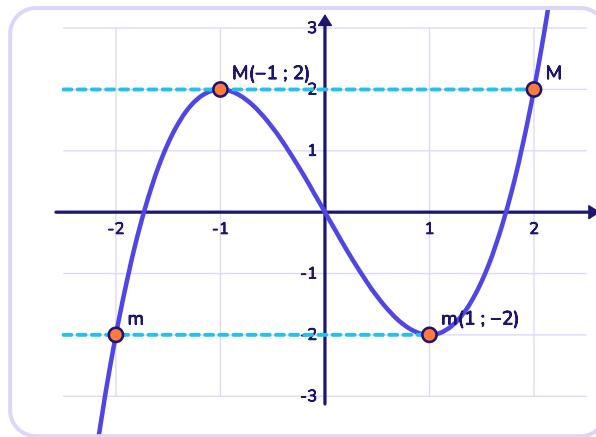
- f admet un **maximum** M sur I , atteint en a , si $f(a) = M$ et si $f(x) \leq M$ pour tout x de I .
- f admet un **minimum** m sur I , atteint en a , si $f(a) = m$ et si $f(x) \geq m$ pour tout x de I .

Un **extremum** est un maximum ou un minimum.

Le maximum est une **valeur** que l'on lit sur l'axe vertical ; la valeur de x où il est atteint se lit sur l'axe horizontal. Pour la fonction f de la partie 1, le maximum est **4**, atteint en $x = 1$, et le minimum est **-5**, atteint en $x = -2$ et en $x = 4$.

! Astuce de Zyro

Sur ma planète, on dit : « le maximum est une hauteur, pas une adresse ». Le maximum, c'est la valeur de $f(x)$; l'adresse où on la trouve, c'est x .



E Exemple 2

La fonction $g(x) = x^3 - 3x$ est définie sur $[-2; 2]$. On a $g(-2) = -2$, $g(-1) = 2$, $g(1) = -2$ et $g(2) = 2$. Elle est croissante sur $[-2; -1]$, décroissante sur $[-1; 1]$, puis croissante sur $[1; 2]$. Son maximum est **2**, atteint en **-1** et en **2** ; son minimum est **-2**, atteint en **-2** et en **1**.

Tu vois qu'un extremum peut être atteint **en plusieurs valeurs** de x .

I 5. Comparer des images sans les calculer

Quand on connaît les variations d'une fonction, on peut comparer deux images $f(a)$ et $f(b)$ sans calculer la moindre valeur.

M Comparer $f(a)$ et $f(b)$

1. Vérifie que a et b sont dans **un même intervalle** où f est croissante, ou où elle est décroissante.
2. Compare a et b .
3. Conclut : si f est croissante, les images sont rangées dans le même ordre ; si elle est décroissante, dans l'ordre inverse.

E**Exemple 3**

Pour la fonction f de la partie 1 : $-1,5$ et $0,5$ sont dans $[-2; 1]$ où f est croissante, et $-1,5 < 0,5$, donc $f(-1,5) < f(0,5)$. Ensuite, 2 et $3,5$ sont dans $[1; 4]$ où f est décroissante, et $2 < 3,5$, donc $f(2) > f(3,5)$.

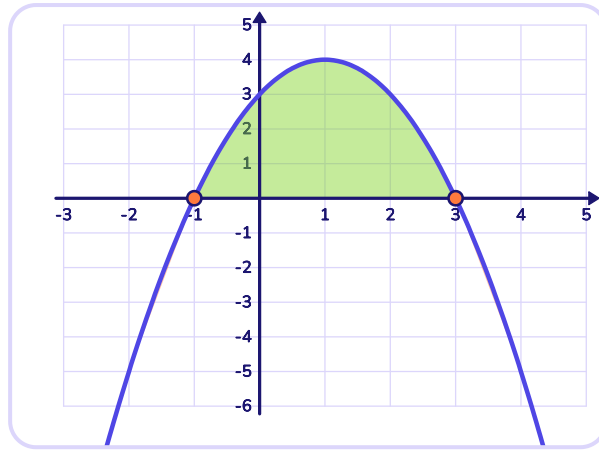
**Piège**

Si a et b sont de part et d'autre d'un changement de sens, le tableau ne permet pas de conclure. Pour la fonction f , les nombres $-1,5$ et 2 sont de part et d'autre de 1 : $f(-1,5)$ et $f(2)$ ne se comparent pas avec le seul tableau.

6. Étudier le signe d'une fonction**D****Signe d'une fonction**

Étudier le signe de f sur I , c'est trouver les valeurs de x pour lesquelles $f(x) > 0$, $f(x) = 0$ ou $f(x) < 0$. Les valeurs de x telles que $f(x) = 0$ sont les **zéros** de f . On résume le résultat dans un **tableau de signes**.

Graphiquement, $f(x) > 0$ quand la courbe est **au-dessus** de l'axe des abscisses, et $f(x) < 0$ quand elle est **en dessous**.



Pour $f(x) = -x^2 + 2x + 3$, les zéros sont -1 et 3 , car $f(x) = -(x + 1)(x - 3)$.

x	-2	-1	3	4	
f(x)	-	0	+	0	-

E Exemple 4

Signe de $p(x) = 2x - 6$ sur $\mathbb{R}$. On résout $2x - 6 = 0$, soit $x = 3$. La fonction est affine de coefficient $2 > 0$, donc elle est croissante : négative pour $x < 3$, nulle en 3 , positive pour $x > 3$.

Attention à ne pas confondre : le **signe** dit si les images sont positives ou négatives, les **variations** disent si elles augmentent ou diminuent. Une fonction peut être positive et décroissante à la fois.

7. Les fonctions de référence

Trois fonctions simples servent de modèles. Leurs variations sont à connaître.

$x \mapsto ax + b$ avec
 $a > 0$

croissante sur $\mathbb{R}$

$x \mapsto ax + b$ avec
 $a < 0$

décroissante sur $\mathbb{R}$

carré $x \mapsto x^2$

**décroissante sur $] -\infty ; 0]$, croissante sur
 $[0 ; +\infty[$, minimum 0 en 0**

inverse $x \mapsto \frac{1}{x}$

**décroissante sur $] -\infty ; 0[$ et décroissante
sur $]0 ; +\infty[$**

P

Preuve pour le carré sur $[0 ; +\infty[$

Soient $0 \leq a < b$. Alors $b^2 - a^2 = (b - a)(b + a)$. Le facteur $b - a$ est strictement positif et $b + a$ l'est aussi (car $b > 0$ et $a \geq 0$). Donc $b^2 - a^2 > 0$, c'est-à-dire $a^2 < b^2$: le carré est strictement croissant sur $[0 ; +\infty[$.



Piège de l'inverse

L'inverse n'est **pas** décroissante sur $\mathbb{R}^*$ tout entier : $-2 < 3$ mais $\frac{1}{-2} = -0,5$ est plus petit que $\frac{1}{3}$. Elle est décroissante sur chacun des deux intervalles $] -\infty ; 0[$ et $]0 ; +\infty[$, pris séparément.

E**Exemple 5**

Compare $(-3)^2$ et $(-2)^2$ sans calculatrice. Les nombres -3 et -2 sont dans $] -\infty ; 0]$ où le carré est décroissant, et $-3 < -2$, donc $(-3)^2 > (-2)^2$. On vérifie : $9 > 4$.

À retenir

- Croissante : $a < b$ entraîne $f(a) \leq f(b)$. Décroissante : $a < b$ entraîne $f(a) \geq f(b)$. Toujours préciser l'intervalle.
- Le tableau de variations donne les bornes, les valeurs où le sens change, leurs images et les flèches.
- Le maximum et le minimum sont des **valeurs** de $f(x)$; on précise aussi où ils sont atteints, et ils peuvent l'être plusieurs fois.
- Pour comparer deux images, il faut que les deux nombres soient dans un même intervalle de monotonie.
- Signe d'une fonction : courbe au-dessus de l'axe = positive, en dessous = négative, zéros = points sur l'axe.
- Affine selon le signe de a , carré décroissant puis croissant, inverse décroissante sur chaque intervalle séparément.

Le livre de cours de maths 2de

Tout le programme en un seul PDF de 99 pages, à imprimer ou à garder sur ta tablette.

[Voir le livre](#)

 Zyro te conseille la suite

 Exercices de maths

Variations et extremums : exercices de maths 2de

 Contrôles de maths

Variations et extremums : contrôle de maths 2de

 QCM de maths

Variations et extremums : QCM de maths 2de

 Exercices de maths

Fonctions de référence : exercices de maths 2de

 Exercices de maths

 Contrôles de maths

Vecteurs du plan : exercices de maths
2de

Fonctions de référence : contrôle de
maths 2de

Zyro vous emmène sur nos sites partenaires

Embarquez pour d'autres planètes du savoir et leurs applis.

Décollage