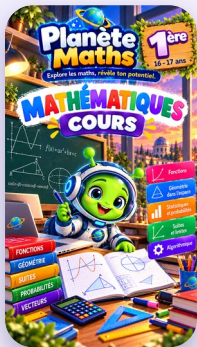


Variations et extremums : cours de maths 1ère à télécharger en PDF



Le livre de cours de maths 1ère

Tout le programme en un seul PDF de 103 pages, à imprimer ou à garder sur ta tablette.

[Voir le livre](#)

Une balle lancée vers le haut monte, atteint un sommet, puis retombe ; un bénéfice augmente avec les ventes, puis finit parfois par diminuer ; la facture d'énergie d'un atelier passe par un minimum. Dans tous ces cas, la question est la même : **où la quantité grandit-elle, où diminue-t-elle, et quand est-elle la plus grande ou la plus petite ?** Grâce au nombre dérivé, tu vas répondre à ces questions de façon sûre, sans te fier à un simple coup d'œil sur une courbe.

1. Croissance et décroissance

D

Sens de variation

Soit f une fonction définie sur un intervalle I .

- f est **croissante** sur I si, pour tous réels a et b de I tels que $a < b$, on a $f(a) \leq f(b)$: elle conserve l'ordre.
- f est **décroissante** sur I si, pour tous $a < b$ de I , on a $f(a) \geq f(b)$: elle renverse l'ordre.

Avec des inégalités strictes ($f(a) < f(b)$ ou $f(a) > f(b)$), on dit que la fonction est **strictement** croissante ou strictement décroissante.

Dire qu'une fonction est croissante, c'est dire que sa courbe « monte » quand on la parcourt de gauche à droite. Étudier les **variations** d'une fonction, c'est découvrir les intervalles où elle monte et ceux où elle descend. Le tableau de variations les résume avec des flèches.

2. Le lien entre le signe de la dérivée et les variations

Le nombre dérivé $f'(a)$ est le coefficient directeur de la tangente en a : s'il est positif, la tangente monte ; s'il est négatif, elle descend. Ce constat se transforme en théorème.

P**Théorème**

Soit f une fonction dérivable sur un intervalle I .

- Si $f'(x) \geq 0$ pour tout x de I , alors f est croissante sur I .
- Si $f'(x) \leq 0$ pour tout x de I , alors f est décroissante sur I .
- Si $f'(x) = 0$ pour tout x de I , alors f est constante sur I .

Si l'inégalité est stricte sauf en un nombre fini de points, la monotonie est stricte.

Réciproquement, une fonction dérivable et croissante sur I a une dérivée positive ou nulle sur I .
Voilà pourquoi l'étude du **signe de f'** est l'outil central de ce chapitre.

3. Dresser un tableau de variations**M****Méthode**

1. Précise l'ensemble d'étude et vérifie que f est dérivable.
2. Calcule $f'(x)$ et factorise-la si possible.
3. Étudie le signe de $f'(x)$ (tableau de signes si c'est un produit).
4. Reporte les signes dans le tableau : $+$ donne une flèche qui monte, $-$ une flèche qui descend.
5. Calcule les images aux valeurs charnières et aux bornes, et écris-les au bout des flèches.

E

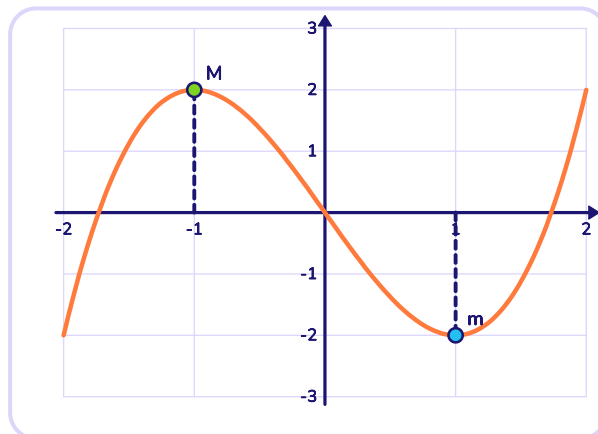
Exemple 1

On étudie $f(x) = x^3 - 3x$ sur $[-2; 2]$.

La fonction est dérivable et $f'(x) = 3x^2 - 3 = 3(x - 1)(x + 1)$. Ce produit s'annule en -1 et en 1 . Comme $3x^2 - 3$ est un trinôme de coefficient dominant positif, il est négatif entre ses racines et positif à l'extérieur : f' est positive sur $[-2; -1]$, négative sur $[-1; 1]$, positive sur $[1; 2]$.

Les images : $f(-2) = -8 + 6 = -2$, $f(-1) = -1 + 3 = 2$, $f(1) = 1 - 3 = -2$, $f(2) = 8 - 6 = 2$.

x	-2	-1	1	2		
f'(x)		+	0	-	0	+
f(x)		2		-2		2



La courbe confirme le tableau : elle monte jusqu'au point $M(-1; 2)$, descend jusqu'à $m(1; -2)$, puis remonte.

4. Extremums locaux

D Extremum local

Soit f définie sur un intervalle I et a un réel de I .

- $f(a)$ est un **maximum local** s'il existe un intervalle ouvert contenant a sur lequel $f(x) \leq f(a)$.
- $f(a)$ est un **minimum local** s'il existe un intervalle ouvert contenant a sur lequel $f(x) \geq f(a)$.

Un maximum ou un minimum local s'appelle un **extremum local**.

P Condition d'existence

Soit f dérivable sur un intervalle ouvert I et a dans I .

- Si f admet un extremum local en a , alors $f'(a) = 0$.
- Si f' s'annule en a **en changeant de signe**, alors f admet un extremum local en a : un maximum si f' passe de $+$ à $-$, un minimum si elle passe de $-$ à $+$.

⚠ Attention

$f'(a) = 0$ ne suffit pas ! La fonction cube $x \mapsto x^3$ a une dérivée $3x^2$ nulle en 0 , mais elle est strictement croissante sur $\mathbb{R}$ et n'a aucun extremum. La dérivée doit **changer de signe**.

Dans l'exemple 1, f' passe de $+$ à $-$ en -1 : $f(-1) = 2$ est un maximum local. Elle passe de $-$ à $+$ en 1 : $f(1) = -2$ est un minimum local.

5. Extremum global sur un intervalle

D Extremum global

$f(a)$ est le **maximum** de f sur I si $f(x) \leq f(a)$ pour **tout** x de I . Le **minimum** se définit avec $f(x) \geq f(a)$. Un tel extremum est dit **global** sur I .

Un extremum local n'est « le meilleur » que dans son voisinage ; un extremum global l'est sur tout l'intervalle. Sur un intervalle fermé $[a ; b]$, le maximum et le minimum se trouvent toujours parmi les valeurs en **bornes** et en **points où f' s'annule** : il suffit de lire le tableau de variations et de comparer.

E Exemple 2

Soit $h(x) = -2x^2 + 8x + 1$ sur $[0 ; 5]$. On a $h'(x) = -4x + 8 = -4(x - 2)$, positive pour $x < 2$ et négative pour $x > 2$. Donc h croît de $h(0) = 1$ à $h(2) = -8 + 16 + 1 = 9$, puis décroît jusqu'à $h(5) = -50 + 40 + 1 = -9$.

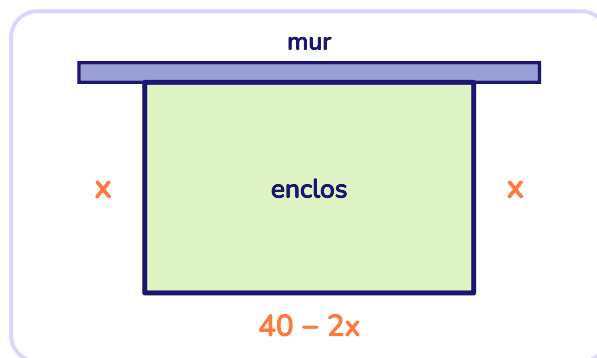
Le maximum de h sur $[0 ; 5]$ est **9**, atteint en $x = 2$; son minimum est **-9**, atteint en $x = 5$, à une borne.

6. Problèmes d'optimisation

Optimiser, c'est chercher la plus grande ou la plus petite valeur d'une grandeur : une aire, un volume, un coût, un bénéfice. La démarche suit toujours le même fil.

M**Méthode d'optimisation**

1. Choisis une inconnue x et précise l'intervalle des valeurs possibles.
2. Exprime la grandeur à optimiser sous la forme d'une fonction $f(x)$.
3. Dérive, étudie le signe de f' et dresse le tableau de variations.
4. Repère le maximum ou le minimum et conclus par une phrase avec l'unité.

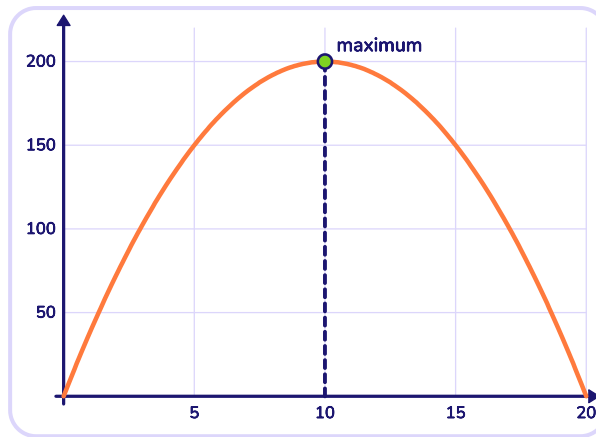
**E****Exemple 3**

Un éleveur dispose de **40** m de grillage pour fermer un enclos rectangulaire adossé à un mur : seuls trois côtés sont grillagés. Quelles dimensions donnent l'aire maximale ?

Notons x la longueur (en m) des deux côtés perpendiculaires au mur. Le côté parallèle mesure $40 - 2x$, avec $x \in [0 ; 20]$. L'aire est $A(x) = x(40 - 2x) = 40x - 2x^2$.

$A'(x) = 40 - 4x = 4(10 - x)$: positive pour $x < 10$, négative ensuite. Donc A croît jusqu'en $x = 10$, puis décroît. Le maximum vaut $A(10) = 400 - 200 = 200$.

L'aire maximale est de **200 m²**, pour des côtés de **10** m et un côté parallèle au mur de **20** m.



7. Position relative de deux courbes

Pour savoir quelle courbe est au-dessus de l'autre, on étudie le **signe de la différence** des deux fonctions.

P

Propriété

Soit f et g deux fonctions définies sur un même intervalle, de courbes $\mathcal{C}_f$ et $\mathcal{C}_g$.

- Si $f(x) - g(x) > 0$, alors $\mathcal{C}_f$ est **au-dessus** de $\mathcal{C}_g$ au point d'abscisse x .
- Si $f(x) - g(x) < 0$, alors $\mathcal{C}_f$ est **en dessous** de $\mathcal{C}_g$.
- Si $f(x) - g(x) = 0$, les courbes se coupent (ou se touchent) en ce point.

E

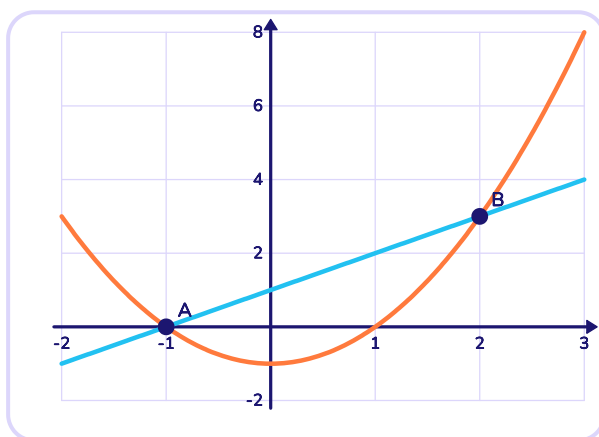
Exemple 4

Position relative des courbes de $f(x) = x^2 - 1$ et de $g(x) = x + 1$.

$f(x) - g(x) = x^2 - x - 2 = (x + 1)(x - 2)$. Ce produit est positif à l'extérieur des racines -1 et 2 , négatif entre elles.

Intervalle	$] -\infty ; -1[$	$] -1 ; 2[$	$] 2 ; +\infty[$
Signe de $f(x) - g(x)$	+	-	+
Position de $\mathcal{C}_f$	au-dessus	en dessous	au-dessus

Les courbes se coupent aux points $A(-1; 0)$ et $B(2; 3)$, car $f(-1) = g(-1) = 0$ et $f(2) = g(2) = 3$.



8. Étude complète d'un polynôme

Étudier complètement une fonction polynôme, c'est enchaîner dérivée, signe, tableau, extremums, et éventuellement tracé et lecture graphique.

E

Exemple 5

Étude de $p(x) = 2x^3 - 3x^2 - 12x + 5$ sur $[-2; 3]$.

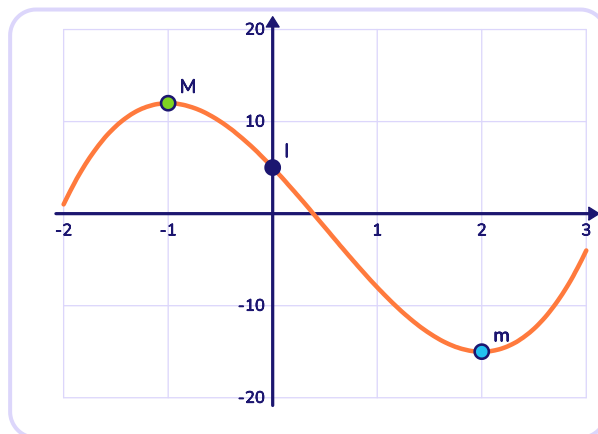
Dérivée. $p'(x) = 6x^2 - 6x - 12 = 6(x^2 - x - 2) = 6(x + 1)(x - 2)$.

Signe. p' est positive sur $[-2; -1]$, négative sur $[-1; 2]$, positive sur $[2; 3]$.

Images. $p(-2) = -16 - 12 + 24 + 5 = 1$; $p(-1) = -2 - 3 + 12 + 5 = 12$;
 $p(2) = 16 - 12 - 24 + 5 = -15$; $p(3) = 54 - 27 - 36 + 5 = -4$.

Conclusion. p admet un maximum local **12** en -1 et un minimum local -15 en **2**. Sur $[-2; 3]$, ce sont aussi le maximum et le minimum globaux. La courbe coupe l'axe des ordonnées en $p(0) = 5$.

x	-2	-1	2	3		
f'(x)		+	0	-	0	+
f(x)	1	12	-15	-4		





Astuce de Zyro

Sur ma planète, on vérifie toujours son tableau avec la courbe : si une flèche monte alors que la courbe descend, c'est qu'un signe de la dérivée a glissé quelque part !

À retenir

- $f' \geq 0$ sur I : f croissante ; $f' \leq 0$ sur I : f décroissante ; $f' = 0$: f constante.
- On dresse un tableau de variations en étudiant le **signe de f'** , puis en calculant les images aux bornes et aux valeurs charnières.
- Un extremum local apparaît quand **f' s'annule en changeant de signe** ; $f'(a) = 0$ seul ne suffit pas (exemple de x^3).
- Sur $[a ; b]$, l'extremum global se lit en comparant les valeurs aux bornes et aux points où f' s'annule.
- Optimiser : choisir l'inconnue, écrire $f(x)$, dériver, tableau, conclure avec une phrase et une unité.
- Position relative : on étudie le signe de $f(x) - g(x)$; positif, $\mathcal{C}_f$ est au-dessus de $\mathcal{C}_g$.

Le livre de cours de maths 1ère

Tout le programme en un seul PDF de 103 pages, à imprimer ou à garder sur ta tablette.

[Voir le livre](#)



Zyro te conseille la suite

 Exercices de maths

Variations et extremums : exercices de maths 1ère

 Contrôles de maths

Variations et extremums : contrôle de maths 1ère

 QCM de maths

Variations et extremums : QCM de maths 1ère

 Exercices de maths

Suites numériques : exercices de maths 1ère

 Exercices de maths

Suites arithmétiques et géométriques : exercices de maths 1ère

 Contrôles de maths

Suites numériques : contrôle de maths 1ère

Zyro vous emmène sur nos sites partenaires

Embarquez pour d'autres planètes du savoir et leurs applis.

Décollage