

Variations et extremums : exercices corrigés de maths 1ère à télécharger en PDF



Le livre d'exercices corrigés de maths 1ère

Tout le programme en un seul PDF de 152 pages, à imprimer ou à garder sur ta tablette.

[Voir le livre](#)

Corrigés rédigés des exercices du chapitre. Vérifie chaque étape, puis corrige-toi.

1 Une parabole à étudier



- $f'(x) = 2x - 6 = 2(x - 3)$. Elle est négative pour $x < 3$, nulle en 3 et positive pour $x > 3$.
- f est donc décroissante sur $] -\infty ; 3]$ et croissante sur $[3 ; +\infty[$. On calcule $f(3) = 9 - 18 + 4 = -5$.
- Comme f décroît jusqu'en 3 puis croît, $f(x) \geq f(3)$ pour tout réel x . Le minimum de f est -5 , atteint en $x = 3$.

2 Lecture d'une courbe



- a. La courbe descend de $x = -2$ à $x = -1$, monte de -1 à 1 , puis redescend de 1 à 2 .
Donc u est décroissante sur $[-2; -1]$, croissante sur $[-1; 1]$ et décroissante sur $[1; 2]$.
- b. On lit $u(-2) = 2, u(-1) = -2, u(1) = 2, u(2) = -2$. Tableau :
- $$2 \searrow -2 \nearrow 2 \searrow -2.$$
- c. $u(-1) = -2$ est un minimum local ; $u(1) = 2$ est un maximum local.

3 Du signe de la dérivée aux variations



- a. Le produit $(x - 2)(x + 3)$ s'annule en -3 et en 2 . Son coefficient dominant est positif : il est positif sur $] -\infty; -3[$, négatif sur $] -3; 2[$ et positif sur $]2; +\infty[$.
- b. f est croissante sur $] -\infty; -3[$, décroissante sur $] -3; 2[$, puis croissante sur $]2; +\infty[$.
- c. f' passe de $+$ à $-$ en -3 : maximum local en $x = -3$. Elle passe de $-$ à $+$ en 2 : minimum local en $x = 2$.

4 Vrai ou faux ?



- a. **Vrai.** $f'(x) = 3x^2 + 1 > 0$ pour tout réel x , car $3x^2 \geq 0$.
- b. **Faux.** $g(0) = 0$ et $g(1) = 1$: on a $0 < 1$ et $g(0) < g(1)$: la fonction ne renverse pas l'ordre, donc elle n'est pas décroissante sur $\mathbb{R}$. (Elle décroît sur $] -\infty; 0]$ seulement.)
- c. **Vrai.** $h'(x) = -3 < 0$ pour tout x .
- d. **Faux.** Pour $f(x) = x^3$, on a $f'(0) = 0$ mais f est strictement croissante sur $\mathbb{R}$, donc sans extremum en 0 : la dérivée ne change pas de signe.

5 Le point le plus bas



- a. $f'(x) = 4x + 8 = 4(x + 2)$, négative si $x < -2$, positive si $x > -2$. f décroît sur $] -\infty ; -2]$ puis croît sur $[-2 ; +\infty[$, avec $f(-2) = 8 - 16 - 1 = -9$.
- b. D'après le tableau, $f(-2) = -9$ est le minimum de f sur $\mathbb{R}$: pour tout x , $f(x) \geq f(-2) = -9$.

6 Deux extremums sur un intervalle



- a. $f'(x) = 3x^2 - 27 = 3(x - 3)(x + 3)$.
- b. f' est positive sur $[-4 ; -3]$, négative sur $[-3 ; 3]$, positive sur $[3 ; 4]$. Images : $f(-4) = -64 + 108 = 44$, $f(-3) = -27 + 81 = 54$, $f(3) = 27 - 81 = -54$, $f(4) = 64 - 108 = -44$. Tableau : $44 \nearrow 54 \searrow -54 \nearrow -44$.
- c. Le maximum est **54** (en $x = -3$, car $54 > 44$) et le minimum est **-54** (en $x = 3$, car $-54 < -44$).

7 Un ballon lancé en l'air



- a. $h'(t) = -10t + 20 = -10(t - 2)$, positive pour $t < 2$, négative pour $t > 2$.
- b. h croît sur $[0 ; 2]$ puis décroît sur $[2 ; 4]$. Le ballon est le plus haut à $t = 2$ s : $h(2) = -20 + 40 + 2 = 22$. Il atteint **22 m**.
- c. $h(0) = 2$ et $h(4) = -80 + 80 + 2 = 2$. La hauteur minimale est **2 m**, atteinte au départ et à $t = 4$ s.

8 Maximiser un bénéfice



- a. $B'(x) = -4x + 36 = -4(x - 9)$, positive sur $[0; 9[$, négative sur $]9; 15]$. B croît de $B(0) = -60$ à $B(9) = -162 + 324 - 60 = 102$, puis décroît jusqu'à $B(15) = -450 + 540 - 60 = 30$.
- b. Le bénéfice est maximal pour $x = 9$, soit 900 bols, et vaut 102 centaines d'euros, soit 10 200 €.

9 Un trinôme au-dessus d'une droite



- a. $f(x) - g(x) = x^2 - 4x + 7 - x - 1 = x^2 - 5x + 6$, et $(x - 2)(x - 3) = x^2 - 5x + 6$. Les deux expressions sont égales.
- b. Produit de racines 2 et 3, de coefficient dominant positif : positif sur $] -\infty; 2[$, négatif sur $]2; 3[$, positif sur $]3; +\infty[$.
- c. $\mathcal{C}_f$ est au-dessus de $\mathcal{C}_g$ sur $] -\infty; 2[$ et sur $]3; +\infty[$, en dessous sur $]2; 3[$. Elles se coupent en $(2; 3)$ car $f(2) = 4 - 8 + 7 = 3 = g(2)$, et en $(3; 4)$ car $f(3) = 9 - 12 + 7 = 4 = g(3)$.

10 La boîte de volume maximal



- a. La base mesure $12 - 2x$, qui doit rester positive : $x \in [0; 6]$.
- b. La base est un carré de côté $12 - 2x$ et la hauteur vaut x :
 $V(x) = x(12 - 2x)^2 = x(144 - 48x + 4x^2) = 4x^3 - 48x^2 + 144x$.
- c. $V'(x) = 12x^2 - 96x + 144 = 12(x^2 - 8x + 12) = 12(x - 2)(x - 6)$. Sur $[0; 6]$, V' est positive sur $[0; 2]$ et négative sur $[2; 6]$. Donc V croît de $V(0) = 0$ à $V(2) = 128$, puis décroît jusqu'à $V(6) = 0$.
- d. Le volume est maximal pour $x = 2$ cm : $V(2) = 2 \times 8^2 = 128 \text{ cm}^3$.

11 Plusieurs extrema, un seul maximum



- a. $f'(x) = 3x^2 - 6x = 3x(x - 2)$, positive sur $[-1; 0]$, négative sur $[0; 2]$, positive sur $[2; 3]$. Images : $f(-1) = -1 - 3 + 2 = -2$, $f(0) = 2$, $f(2) = 8 - 12 + 2 = -2$, $f(3) = 27 - 27 + 2 = 2$. Tableau : $-2 \nearrow 2 \searrow -2 \nearrow 2$.
- b. Le maximum global est 2 , atteint en $x = 0$ et en $x = 3$. Le minimum global est -2 , atteint en $x = -1$ et en $x = 2$. Un extremum global peut être atteint plusieurs fois.

12 Une inégalité grâce au minimum



Posons $f(x) = x^2 - 4x + 9$. Alors $f'(x) = 2x - 4 = 2(x - 2)$: f décroît sur $] -\infty; 2]$ et croît sur $[2; +\infty[$. Son minimum est $f(2) = 4 - 8 + 9 = 5$.

Donc $f(x) \geq 5$ pour tout réel x , avec égalité uniquement pour $x = 2$.

13 Retrouver les coefficients



$f'(x) = 2x + b$. Un extremum local en 3 impose $f'(3) = 0$, soit $6 + b = 0$, donc $b = -6$.

Ensuite $f(3) = 1$ donne $9 - 18 + c = 1$, donc $c = 10$.

Vérification : $f(x) = x^2 - 6x + 10$, $f'(x) = 2(x - 3)$ change de signe de $-$ à $+$ en 3 , et $f(3) = 1$: c'est bien un minimum.

14 La dérivée s'annule, mais...



- a. $f'(x) = 3x^2 + 6x + 3 = 3(x^2 + 2x + 1) = 3(x + 1)^2$.
- b. Un carré est positif : $f'(x) \geq 0$ pour tout x , avec $f'(x) = 0$ seulement en -1 . Donc f est strictement croissante sur $\mathbb{R}$.
- c. Non : $f'(-1) = 0$ mais f' ne change pas de signe en -1 (elle reste positive). La fonction passe seulement par un « palier » avec $f(-1) = -1 + 3 - 3 = -1$, sans extremum.

15 Étude complète d'un polynôme



- a. $p'(x) = -3x^2 + 6x + 9 = -3(x^2 - 2x - 3) = -3(x - 3)(x + 1)$, car $(x - 3)(x + 1) = x^2 - 2x - 3$.
- b. Le coefficient -3 est négatif : p' est négative sur $[-2; -1]$, positive sur $[-1; 3]$, négative sur $[3; 4]$. Images : $p(-2) = 8 + 12 - 18 - 2 = 0$,
 $p(-1) = 1 + 3 - 9 - 2 = -7$, $p(3) = -27 + 27 + 27 - 2 = 25$,
 $p(4) = -64 + 48 + 36 - 2 = 18$. Tableau : $0 \searrow -7 \nearrow 25 \searrow 18$.
- c. Maximum **25** en $x = 3$; minimum -7 en $x = -1$.
- d. Sur $[-2; -1]$, p reste entre -7 et 0 : aucune solution. Sur $[-1; 3]$, p croît strictement de -7 à **25**, valeurs qui encadrent **20** : une solution. Sur $[3; 4]$, p décroît strictement de **25** à **18**, et $18 < 20 < 25$: une solution. Au total, **deux** solutions.

16 Le rectangle inscrit



- a. La base mesure $2x$ et la hauteur $9 - x^2$: $A(x) = 2x(9 - x^2) = 18x - 2x^3$.
- b. $A'(x) = 18 - 6x^2 = 6(3 - x^2) = 6(\sqrt{3} - x)(\sqrt{3} + x)$. Sur $[0; 3]$, A' est positive si $x < \sqrt{3}$ et négative si $x > \sqrt{3}$. Donc A croît sur $[0; \sqrt{3}]$ puis décroît sur $[\sqrt{3}; 3]$.
- c. L'aire est maximale pour $x = \sqrt{3} \approx 1,73$. Alors
 $A(\sqrt{3}) = 18\sqrt{3} - 2 \times 3\sqrt{3} = 12\sqrt{3} \approx 20,78$ unités d'aire.

17 Un cube et une parabole



- a. $(x+1)(x-2)^2 = (x+1)(x^2 - 4x + 4) = x^3 - 4x^2 + 4x + x^2 - 4x + 4 = x^3 - 3x^2 + 4$, et $f(x) - g(x) = x^3 - 3x^2 + 4$. L'égalité est démontrée.
- b. Le facteur $(x-2)^2$ est toujours positif ou nul, nul seulement en 2. Le signe de $f(x) - g(x)$ est donc celui de $x+1$ (pour $x \neq 2$) : négatif pour $x < -1$, nul en -1 , positif pour $x > -1$ et $x \neq 2$, nul en 2.
- c. La courbe de f est en dessous de celle de g sur $] -\infty; -1[$, au-dessus sur $] -1; 2[$ et sur $]2; +\infty[$. Points communs : $(-1; -1)$ et $(2; 8)$. En $x = 2$, la différence ne change pas de signe : les courbes se touchent sans se traverser, elles sont tangentes en ce point.

18 Pas d'extremum global sur $\mathbb{R}$



- a. $f(10) = 1000 - 30 = 970$ et $f(-10) = -1000 + 30 = -970$.
- b. Non : $f(10) = 970 > 2$, donc 2 n'est pas le maximum global ; et $f(-10) = -970 < -2$, donc -2 n'est pas le minimum global. Les extremums locaux ne sont pas des extremums globaux.
- c. Sur $[-2; 2]$, le tableau est $-2 \nearrow 2 \searrow -2 \nearrow 2$: toutes les valeurs sont comprises entre -2 et 2 , donc le maximum global est 2 et le minimum global -2 .

19 Un paramètre dans la fonction



- a. $f'_a(x) = 3x^2 - 3a = 3(x^2 - a) = 3(x - \sqrt{a})(x + \sqrt{a})$, qui s'annule en $\sqrt{a}$ et en $-\sqrt{a}$.
- b. f'_a est positive sur $] -\infty ; -\sqrt{a}[$, négative sur $] -\sqrt{a} ; \sqrt{a}[$, positive ensuite. Il y a donc un maximum local en $-\sqrt{a}$ et un minimum local en $\sqrt{a}$.
- c. Maximum local : $f_a(-\sqrt{a}) = -a\sqrt{a} + 3a\sqrt{a} = 2a\sqrt{a}$. On veut $2a\sqrt{a} = 16$, soit $a\sqrt{a} = 8$, et, comme $a \mapsto a\sqrt{a}$ est strictement croissante sur $]0 ; +\infty[$, $a = 4$ (vérification : $4 \times 2 = 8$). La fonction est alors $x^3 - 12x$, de maximum local 16 en $x = -2$.

20 Le point de la parabole le plus proche



- a. $AM^2 = (x - 0)^2 + (x^2 - 3)^2 = x^2 + x^4 - 6x^2 + 9 = x^4 - 5x^2 + 9$.
- b. $g'(x) = 4x^3 - 10x = 2x(2x^2 - 5)$, qui s'annule en 0 et en $\pm\sqrt{5/2}$. Avec $r = \sqrt{5/2} \approx 1,58$: g' est négative sur $] -\infty ; -r[$, positive sur $] -r ; 0[$, négative sur $]0 ; r[$, positive sur $]r ; +\infty[$. Donc g décroît, croît, décroît, puis croît ; $g(0) = 9$ est un maximum local.
- c. Les minimums locaux valent $g(\pm r) = \frac{25}{4} - \frac{25}{2} + 9 = \frac{11}{4}$, et ils sont plus petits que $g(0) = 9$: $\frac{11}{4}$ est le minimum global de g . La distance minimale est donc $AM = \sqrt{\frac{11}{4}} = \frac{\sqrt{11}}{2} \approx 1,66$, atteinte en $x = \pm\sqrt{5/2}$.

Le livre d'exercices corrigés de maths 1ère

Tout le programme en un seul PDF de 152 pages, à imprimer ou à garder sur ta tablette.

Voir le livre

 Zyro te conseille la suite

 Exercices de maths

Variations et extremums : exercices de maths 1ère

 QCM de maths

Variations et extremums : QCM de maths 1ère

 Contrôles de maths

Variations et extremums : contrôle de maths 1ère

 Exercices de maths

Suites numériques : exercices de maths 1ère

 Exercices de maths

 QCM de maths

Suites numériques : QCM de maths 1ère

Suites arithmétiques et géométriques :
exercices de maths 1ère

Zyro vous emmène sur nos sites partenaires

Embarquez pour d'autres planètes du savoir et leurs applis.

Décollage