

Variables aléatoires et loi binomiale : cours de maths Terminale à télécharger en PDF



Le livre de cours de maths Terminale

Tout le programme en un seul PDF de 103 pages, à imprimer ou à garder sur ta tablette.

[Voir le livre](#)

Le hasard n'est pas désordonné : il obéit à des lois que l'on sait décrire, résumer par quelques nombres et même prévoir quand on répète une expérience un grand nombre de fois. Dans ce chapitre, tu apprends à transformer un résultat aléatoire en nombre, à le résumer par son espérance et son écart type, puis à maîtriser le modèle le plus utile du lycée : la loi binomiale.

1. Variable aléatoire et loi de probabilité

D

Variable aléatoire

Soit un univers Ω fini muni d'une probabilité P . Une **variable aléatoire réelle** X est une fonction qui associe un nombre réel à chaque issue de l'expérience. Si X prend les valeurs $x_1, x_2, \dots, x_n$, sa **loi de probabilité** est la donnée des probabilités $p_i = P(X = x_i)$.

Les événements $\{X = x_i\}$ forment une partition de Ω : on a toujours $p_1 + p_2 + \dots + p_n = 1$. On présente la loi dans un tableau. Par exemple, au jeu de la roue des saisons, on tourne une roue et le gain X (en euros) vaut $-2, 1$ ou 5 :

x_i	-2	1	5
$P(X = x_i)$	$0,3$	$0,5$	$0,2$

La somme vaut bien $0,3 + 0,5 + 0,2 = 1$. Un événement comme « gagner au moins 1 euro » s'écrit $\{X \geq 1\}$ et sa probabilité s'obtient en additionnant : $P(X \geq 1) = 0,5 + 0,2 = 0,7$.

2. Espérance, variance et écart type

D Espérance, variance, écart type

$$E(X) = \sum_{i=1}^n p_i x_i \quad V(X) = \sum_{i=1}^n p_i (x_i - E(X))^2 \quad \sigma(X) = \sqrt{V(X)}$$

L'espérance est la valeur moyenne que X prend quand on répète l'expérience très souvent. La variance et l'écart type mesurent la dispersion des valeurs autour de cette moyenne.

P Formule de König-Huygens

$V(X) = E(X^2) - (E(X))^2$, où $E(X^2) = \sum p_i x_i^2$. Cette écriture évite de soustraire l'espérance à chaque valeur.

E Exemple 1 : la roue des saisons

$$E(X) = 0,3 \times (-2) + 0,5 \times 1 + 0,2 \times 5 = -0,6 + 0,5 + 1 = 0,9.$$

$$E(X^2) = 0,3 \times 4 + 0,5 \times 1 + 0,2 \times 25 = 1,2 + 0,5 + 5 = 6,7, \text{ donc}$$

$$V(X) = 6,7 - 0,9^2 = 5,89 \text{ et } \sigma(X) = \sqrt{5,89} \approx 2,43.$$

Si le billet coûte 1 euro, le gain net moyen est $0,9 - 1 = -0,1$ euro : le jeu est légèrement défavorable au joueur.

P Transformation affine

Pour tous réels a et b : $E(aX + b) = a E(X) + b$, $V(aX + b) = a^2 V(X)$ et $\sigma(aX + b) = |a| \sigma(X)$. Ajouter une constante décale la moyenne mais ne change pas la dispersion.

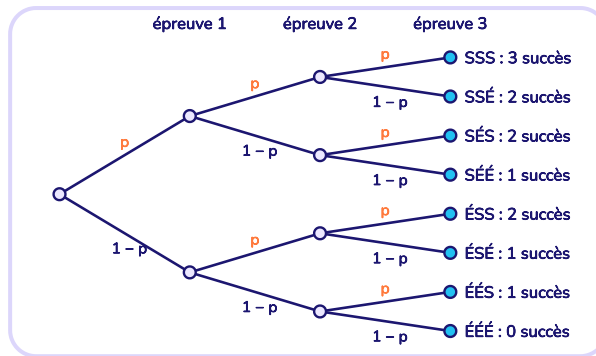
I 3. Épreuve de Bernoulli et schéma de Bernoulli

D Épreuve de Bernoulli

Une **épreuve de Bernoulli** de paramètre p est une expérience à deux issues : le **succès** S , de probabilité p , et l'**échec** $\bar{S}$, de probabilité $1 - p$. La variable X qui vaut 1 en cas de succès et 0 sinon suit la **loi de Bernoulli** de paramètre p .

Pour une loi de Bernoulli, $E(X) = p$ et $V(X) = p(1 - p)$. En effet $E(X) = 0 \times (1 - p) + 1 \times p$ et $E(X^2) = p$, donc $V(X) = p - p^2$.

Un **schéma de Bernoulli** est la répétition de n épreuves de Bernoulli identiques et **indépendantes**. On le représente par un arbre pondéré :



Sur l'arbre à trois épreuves, l'échec est noté É et chaque chemin porte le produit des probabilités de ses branches : le chemin SSÉ a pour probabilité $p \times p \times (1 - p)$.

4. La loi binomiale

D Loi binomiale

Dans un schéma de Bernoulli de n épreuves de paramètre p , la variable X qui compte le nombre de succès suit la **loi binomiale** $\mathcal{B}(n; p)$.

P Probabilité de k succès

Pour tout entier k tel que $0 \leq k \leq n$:

$$P(X = k) = \binom{n}{k} p^k (1 - p)^{n-k}$$

Le coefficient $\binom{n}{k}$ est le nombre de chemins de l'arbre qui contiennent exactement k succès ; chacun a pour probabilité $p^k (1 - p)^{n-k}$.

M**Reconnaître et utiliser une loi binomiale**

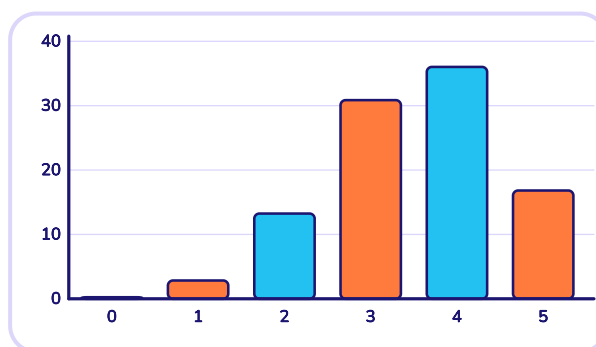
1. Repère l'épreuve élémentaire et ses deux issues : le succès et l'échec.
2. Vérifie que les n répétitions sont identiques et indépendantes (tirage avec remise, lancers successifs...).
3. Donne n et p : « X suit la loi $\mathcal{B}(n; p)$ ».
4. Applique la formule, ou la calculatrice pour les sommes de probabilités.

E**Exemple 2 : lancers francs**

Une joueuse réussit un lancer franc avec la probabilité **0,7**. Elle en tente 5 de façon indépendante. Le nombre X de paniers suit $\mathcal{B}(5; 0,7)$.

$$P(X = 3) = \binom{5}{3} \times 0,7^3 \times 0,3^2 = 10 \times 0,343 \times 0,09 = 0,3087.$$

$$P(X \geq 4) = P(X = 4) + P(X = 5) = 5 \times 0,7^4 \times 0,3 + 0,7^5 = 0,36015 + 0,16807$$



Le diagramme ci-dessus montre la loi $\mathcal{B}(5; 0,7)$ en pourcentage : la valeur la plus probable est 4 succès.



Attention

Un tirage **sans remise** dans une petite urne ne donne pas une loi binomiale : les probabilités changent d'un tirage à l'autre, donc les épreuves ne sont pas indépendantes. Pense aussi à la phrase « au moins un » :

$$P(X \geq 1) = 1 - P(X = 0) = 1 - (1 - p)^n.$$

5. Espérance et variance de la loi binomiale



Moments de la loi binomiale

Si X suit $\mathcal{B}(n; p)$, alors

$$E(X) = np \quad V(X) = np(1 - p) \quad \sigma(X) = \sqrt{np(1 - p)}.$$



Exemple 3 : graines germées

Une graine germe avec la probabilité **0,15**. Sur un semis de 40 graines indépendantes, X suit $\mathcal{B}(40; 0,15)$: $E(X) = 40 \times 0,15 = 6$ graines,
 $V(X) = 40 \times 0,15 \times 0,85 = 5,1$ et $\sigma(X) = \sqrt{5,1} \approx 2,26$.

6. Somme de variables aléatoires

P

Linéarité et indépendance

Pour deux variables X et Y définies sur le même univers,

$E(X + Y) = E(X) + E(Y)$, sans aucune condition. Si de plus X et Y sont indépendantes, alors $V(X + Y) = V(X) + V(Y)$, et aussi $V(X - Y) = V(X) + V(Y)$.

Ces deux règles expliquent la loi binomiale : $X = X_1 + \dots + X_n$, où chaque X_i suit la loi de Bernoulli de paramètre p . Alors $E(X) = n \times p$ et, par indépendance, $V(X) = n \times p(1 - p)$. Elles montrent aussi que la somme de deux variables indépendantes de lois $\mathcal{B}(n; p)$ et $\mathcal{B}(m; p)$ suit $\mathcal{B}(n + m; p)$.

!

Le conseil de Zyro

Sur ma planète, on calcule d'abord les espérances : elles s'additionnent toujours. Pour les variances, je vérifie d'abord l'indépendance, et seulement après j'additionne. Les écarts types, eux, ne s'additionnent jamais : on passe par la variance, puis par la racine carrée.

7. Inégalité de Bienaymé-Tchebychev

P Inégalité de Bienaymé-Tchebychev

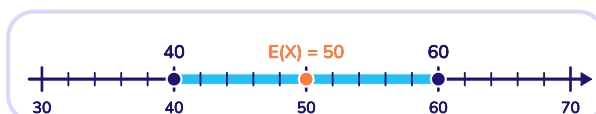
Pour toute variable aléatoire X d'espérance $E(X)$ et de variance $V(X)$, et pour tout réel $\delta > 0$:

$$P(|X - E(X)| \geq \delta) \leq \frac{V(X)}{\delta^2}.$$

Elle dit que X s'écarte rarement de sa moyenne, d'autant plus rarement que la variance est petite. Elle s'applique à n'importe quelle loi.

E Exemple 4 : cent lancers de pièce

X compte les piles obtenus en 100 lancers d'une pièce équilibrée : $X \sim \mathcal{B}(100; 0,5)$, $E(X) = 50$, $V(X) = 25$. Avec $\delta = 10$: $P(|X - 50| \geq 10) \leq \frac{25}{100} = 0,25$. Donc, avec une probabilité au moins égale à **0,75**, le nombre de piles est compris entre 41 et 59.



La zone bleue regroupe les valeurs dont l'écart à 50 est strictement inférieur à 10.

8. Loi des grands nombres

Soit $X_1, \dots, X_n$ des variables indépendantes de même loi, d'espérance μ et de variance σ^2 . Leur moyenne $M_n = \frac{X_1 + \dots + X_n}{n}$ vérifie $E(M_n) = \mu$ et $V(M_n) = \frac{\sigma^2}{n}$. L'inégalité de Bienaymé-Tchebychev donne alors, pour tout $\delta > 0$:

$$P(|M_n - \mu| \geq \delta) \leq \frac{\sigma^2}{n\delta^2}.$$

Le second membre tend vers 0 quand n tend vers l'infini : c'est la **loi (faible) des grands nombres**.

Pour un schéma de Bernoulli, la fréquence $F_n = \frac{X}{n}$ des succès se rapproche de p quand n grandit, avec $V(F_n) = \frac{p(1-p)}{n}$.

E Exemple 5 : combien de lancers ?

Pour une pièce équilibrée, $V(F_n) = \frac{0,25}{n}$. On veut $P(|F_n - 0,5| \geq 0,1) \leq 0,05$. Il suffit que $\frac{0,25}{n \times 0,01} \leq 0,05$, soit $n \geq 500$.

À retenir

- La loi d'une variable aléatoire est un tableau de probabilités dont la somme vaut 1.
- $E(X) = \sum p_i x_i$; $V(X) = E(X^2) - E(X)^2$; $\sigma(X) = \sqrt{V(X)}$.
- $E(aX + b) = aE(X) + b$ et $V(aX + b) = a^2V(X)$.
- $X \sim \mathcal{B}(n; p)$: $P(X = k) = \binom{n}{k} p^k (1-p)^{n-k}$, $E(X) = np$, $V(X) = np(1-p)$.
- Pour des variables indépendantes, les variances s'additionnent ; les espérances s'additionnent toujours.
- Bienaymé-Tchebychev : $P(|X - E(X)| \geq \delta) \leq V(X)/\delta^2$.
- Loi des grands nombres : la moyenne de n variables indépendantes de même loi se concentre autour de l'espérance.

Le livre de cours de maths Terminale

Tout le programme en un seul PDF de 103 pages, à imprimer ou à garder sur ta tablette.

Voir le livre



Entraîne-toi : défi express de Terminale

Changer de niveau

Niveau : **Terminale**

6 questions au hasard, correction tout de suite.



Lancer le défi



Zyro te conseille la suite



Exercices de maths

Variables aléatoires et loi binomiale :
exercices de maths Terminale



Contrôles de maths

Variables aléatoires et loi binomiale :
contrôle de maths Terminale

 QCM de maths

Variables aléatoires et loi binomiale :
QCM de maths Terminale

 Exercices de maths

Suites numériques et récurrence :
exercices de maths Terminale

 Exercices de maths

Limites de fonctions : exercices de maths
Terminale

 Contrôles de maths

Suites numériques et récurrence :
contrôle de maths Terminale

Zyro vous emmène sur nos sites partenaires

Embarquez pour d'autres planètes du savoir et leurs applis.

Décollage