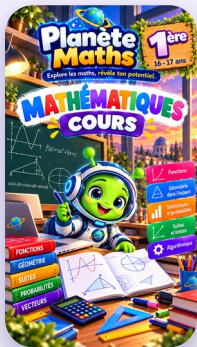


Variables aléatoires : cours de maths 1ère à télécharger en PDF



Le livre de cours de maths 1ère

Tout le programme en un seul PDF de 103 pages, à imprimer ou à garder sur ta tablette.

[Voir le livre](#)

Combien de fois vas-tu gagner à un jeu de tirage ? Combien de pièces défectueuses dans un lot ? Combien de réponses justes en répondant au hasard à un quiz ? Dans chaque cas, le hasard produit un **nombre**. Ce chapitre t'apprend à décrire ce nombre (sa **loi**), à le résumer par une moyenne (l'**espérance**) et une dispersion (la **variance**), puis à étudier la situation la plus célèbre : la **loi binomiale**.

1. Variable aléatoire et loi de probabilité

D

Variable aléatoire

Quand on associe un nombre réel à chaque issue d'une expérience aléatoire, on définit une **variable aléatoire**, notée par une majuscule comme X . Si X prend les valeurs $x_1, x_2, \dots, x_n$, l'événement « $X = x_i$ » a pour probabilité $p_i = P(X = x_i)$.

D

Loi de probabilité

La loi de X est la donnée de toutes les valeurs x_i et de leurs probabilités p_i , souvent dans un tableau. On a toujours $0 \leq p_i \leq 1$ et $p_1 + p_2 + \dots + p_n = 1$.

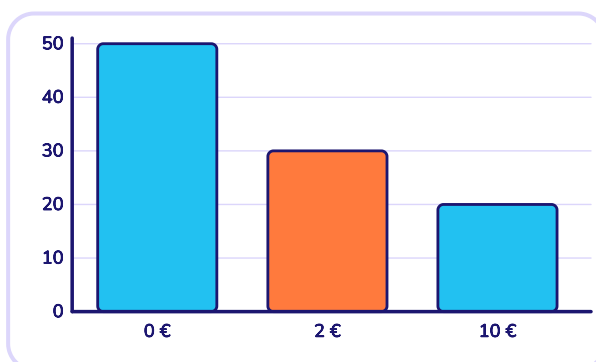
E

Exemple 1 : le sac de jetons

Un sac contient 10 jetons : 5 jetons « 0 € », 3 jetons « 2 € » et 2 jetons « 10 € ». On tire un jeton au hasard et on note X le gain en euros. La loi de X est :

x_i	0	2	10
$P(X = x_i)$	0,5	0,3	0,2

Vérification : $0,5 + 0,3 + 0,2 = 1$.



2. Espérance

D Espérance

L'espérance de X est le nombre

$$E(X) = p_1x_1 + p_2x_2 + \cdots + p_nx_n = \sum_{i=1}^n p_i x_i.$$

C'est la valeur moyenne que prend X quand on répète l'expérience un très grand nombre de fois.

E Exemple 2 : l'espérance du gain

Pour le sac de jetons : $E(X) = 0,5 \times 0 + 0,3 \times 2 + 0,2 \times 10 = 0 + 0,6 + 2 = 2,6$.

En jouant très souvent, on gagne en moyenne **2,60 €** par partie. Si la mise est de **3 €**, le jeu est **défavorable** au joueur ; si elle est de **2,60 €**, il est **équitable**.

P Transformation affine

Pour tous réels a et b : $E(aX + b) = aE(X) + b$.

3. Variance et écart type

Deux jeux peuvent avoir la même espérance mais des résultats très différents : l'un régulier, l'autre plein de surprises. La variance mesure cette dispersion autour de l'espérance.

D**Variance et écart type**

Avec $\mu = E(X)$, la **variance** est

$$V(X) = \sum_{i=1}^n p_i (x_i - \mu)^2 = E(X^2) - (E(X))^2,$$

et l'**écart type** est $\sigma(X) = \sqrt{V(X)}$. Ici $E(X^2) = \sum p_i x_i^2$.

E**Exemple 3 : la dispersion du gain**

Pour le sac de jetons :

$$E(X^2) = 0,5 \times 0^2 + 0,3 \times 2^2 + 0,2 \times 10^2 = 1,2 + 20 = 21,2.$$

$$\text{Donc } V(X) = 21,2 - 2,6^2 = 21,2 - 6,76 = 14,44 \text{ et } \sigma(X) = \sqrt{14,44} = 3,8.$$

P**Transformation affine**

$V(aX + b) = a^2 V(X)$ et $\sigma(aX + b) = |a| \sigma(X)$. Ajouter **b** décale les valeurs sans changer la dispersion ; multiplier par **a** multiplie par $|a|$.

Erreur classique

On n'a pas $V(aX) = aV(X)$: la variance se multiplie par a^2 , pas par **a**. Et la variance n'est jamais négative : si tu en trouves une négative, tu as oublié de retrancher $E(X)^2$ correctement.

4. Épreuve de Bernoulli et schéma de Bernoulli

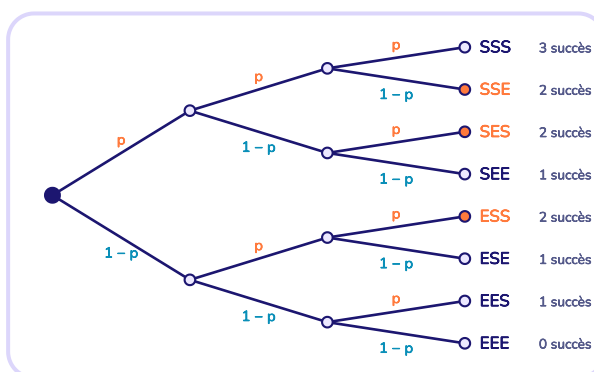
D Épreuve de Bernoulli

Une **épreuve de Bernoulli** de paramètre p est une expérience aléatoire qui n'a que deux issues : le **succès** S , de probabilité p , et l'**échec** $\bar{S}$, de probabilité $1 - p$.

Obtenir un « 6 » en lançant un dé est une épreuve de Bernoulli de paramètre $p = \frac{1}{6}$. La variable qui vaut **1** en cas de succès et **0** sinon a pour espérance p et pour variance $p(1 - p)$.

D Schéma de Bernoulli

Répéter n fois, de façon **identique et indépendante**, une même épreuve de Bernoulli de paramètre p s'appelle un **schéma de Bernoulli** de paramètres n et p .



Sur l'arbre ci-dessus ($n = 3$), trois chemins contiennent exactement deux succès : **SSE**, **SES** et **ESS**. Chacun a pour probabilité $p^2(1 - p)$. Compter ces chemins est justement le rôle des coefficients binomiaux.

5. Coefficients binomiaux

D Coefficient binomial

Pour $0 \leq k \leq n$, le nombre $\binom{n}{k}$ (« k parmi n ») est le **nombre de chemins** contenant exactement k succès dans l'arbre de n répétitions.

P Propriétés

- $\binom{n}{0} = \binom{n}{n} = 1$ et $\binom{n}{1} = n$;
- symétrie : $\binom{n}{k} = \binom{n}{n-k}$;
- relation de Pascal : $\binom{n}{k} + \binom{n}{k+1} = \binom{n+1}{k+1}$.

La relation de Pascal permet de construire le **triangle de Pascal** : chaque nombre est la somme de celui qui est au-dessus et de celui qui est au-dessus à gauche.

$n \backslash k$	0	1	2	3	4	5	6
0	1						
1	1	1					
2	1	2	1				
3	1	3	3	1			
4	1	4	6	4	1		
5	1	5	10	10	5	1	
6	1	6	15	20	15	6	1

Par exemple, $\binom{6}{2} = \binom{5}{1} + \binom{5}{2} = 5 + 10 = 15$. Ta calculatrice donne ces nombres avec la touche « combinaison » (souvent notée nCr).

6. La loi binomiale

D Loi binomiale

Dans un schéma de Bernoulli de paramètres n et p , la variable aléatoire X qui compte le **nombre de succès** suit la **loi binomiale** de paramètres n et p , notée $\mathcal{B}(n; p)$.

P**Probabilité de k succès**

Si X suit $\mathcal{B}(n; p)$, alors pour tout entier k de 0 à n :

$$P(X = k) = \binom{n}{k} p^k (1 - p)^{n-k}.$$

Justification : un chemin à k succès a pour probabilité $p^k(1 - p)^{n-k}$, et il y a $\binom{n}{k}$ tels chemins.

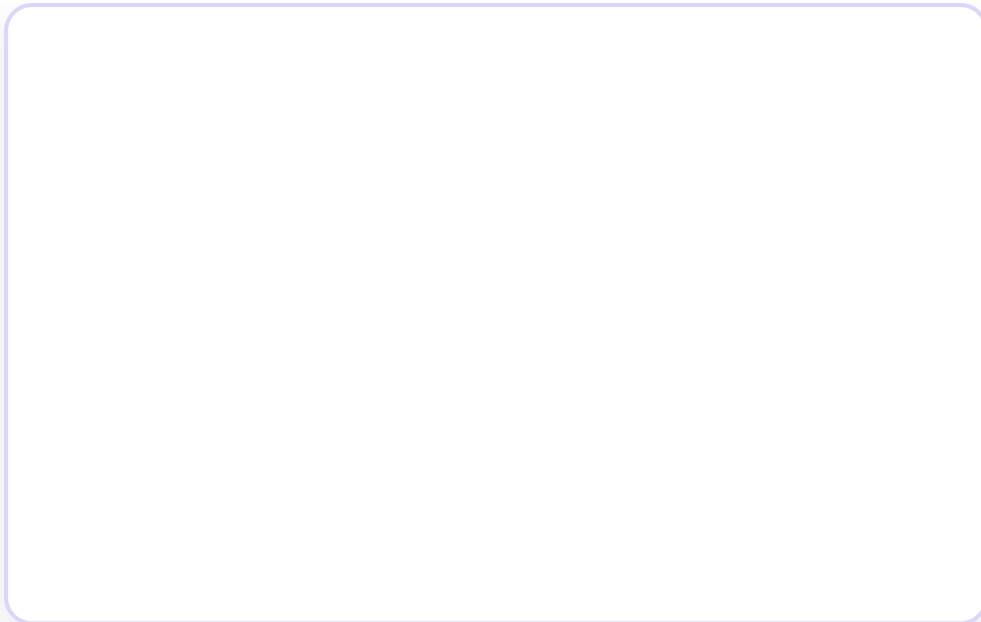
M**Méthode : reconnaître une loi binomiale**

1. Repère l'épreuve répétée et son résultat à deux issues (le succès).
2. Vérifie que les répétitions sont identiques et indépendantes (tirages avec remise, lancers successifs...).
3. Donne n (nombre de répétitions) et p (probabilité d'un succès), puis applique la formule.

E**Exemple 4 : les fléchettes**

Lila lance 10 fléchettes ; chacune atteint la cible avec la probabilité **0,4**, indépendamment des autres. Soit X le nombre de fléchettes dans la cible : X suit $\mathcal{B}(10; 0,4)$.

$$P(X = 4) = \binom{10}{4} \times 0,4^4 \times 0,6^6 = 210 \times 0,0256 \times 0,046656 \approx 0,2508.$$



Variables aléatoires 1ère : diagramme en bâtons de la loi binomiale $B(10 ; 0,4)$ avec la valeur la plus probable $k = 4$ et l'espérance $E(X) = 4$ en pointillés orange



Astuce de Zyro

Sur Terre comme chez moi, « au moins un succès » se calcule toujours en passant par le contraire : $P(X \geq 1) = 1 - P(X = 0) = 1 - (1 - p)^n$. Ça évite d'additionner plein de termes !

7. Espérance et variance d'une loi binomiale



Espérance, variance, écart type

Si X suit $\mathcal{B}(n ; p)$, alors

$$E(X) = np, \quad V(X) = np(1 - p), \quad \sigma(X) = \sqrt{np(1 - p)}.$$

E**Exemple 5 : les fléchettes (suite)**

Pour $\mathcal{B}(10; 0,4)$: $E(X) = 10 \times 0,4 = 4$, $V(X) = 10 \times 0,4 \times 0,6 = 2,4$ et $\sigma(X) = \sqrt{2,4} \approx 1,55$.

Lila atteint donc la cible en moyenne 4 fois sur 10, avec un écart typique d'environ 1,5 fléchette.

8. Intervalle de fluctuation

Quand on répète une expérience, la fréquence de succès observée varie d'un échantillon à l'autre. Quel écart est « normal » ? C'est ce que précise l'intervalle de fluctuation.

D**Intervalle de fluctuation à 95 %**

Soit X suivant $\mathcal{B}(n; p)$. On note a le plus petit entier tel que $P(X \leq a) > 0,025$ et b le plus petit entier tel que $P(X \leq b) \geq 0,975$. L'intervalle $\left[\frac{a}{n}; \frac{b}{n} \right]$ est l'**intervalle de fluctuation à 95 %** de la fréquence de succès : il contient la fréquence observée avec une probabilité d'au moins 0,95.

E**Exemple 6 : fluctuation d'échantillonnage**

Une urne contient 30 % de boules bleues. On tire 40 boules avec remise : X , le nombre de bleues, suit $\mathcal{B}(40; 0,3)$. Avec la calculatrice : $P(X \leq 6) \approx 0,0238$ (inférieur à 0,025) et $P(X \leq 7) \approx 0,0553$, donc $a = 7$. De même $P(X \leq 17) \approx 0,968$ et $P(X \leq 18) \approx 0,985$, donc $b = 18$.

L'intervalle de fluctuation à 95 % est $\left[\frac{7}{40}; \frac{18}{40} \right] = [0,175; 0,45]$.



Variables aléatoires 1ère : loi binomiale $B(40 ; 0,3)$ avec en bleu les valeurs de k comprises entre $a = 7$ et $b = 18$ qui définissent l'intervalle de fluctuation à 95 %

M

Méthode : prise de décision

1. Fais une hypothèse sur la proportion p et détermine l'intervalle de fluctuation à 95 %.
2. Calcule la fréquence f observée sur l'échantillon.
3. Si f est dans l'intervalle, on ne rejette pas l'hypothèse ; sinon, on la rejette avec un risque d'erreur d'environ 5 %.

À retenir

- La loi de X donne chaque valeur x_i et sa probabilité p_i ; la somme des p_i vaut 1.
- $E(X) = \sum p_i x_i$; $V(X) = E(X^2) - E(X)^2$; $\sigma(X) = \sqrt{V(X)}$.
- $E(aX + b) = aE(X) + b$ et $V(aX + b) = a^2 V(X)$.
- Une **épreuve de Bernoulli** a deux issues (succès p , échec $1 - p$) ; n répétitions indépendantes forment un schéma de Bernoulli.
- $X \sim \mathcal{B}(n ; p) : P(X = k) = \binom{n}{k} p^k (1 - p)^{n-k}$, $E(X) = np$, $V(X) = np(1 - p)$.
- $\binom{n}{k} = \binom{n}{n-k}$ et $\binom{n}{k} + \binom{n}{k+1} = \binom{n+1}{k+1}$.
- L'**intervalle de fluctuation à 95 %** est $\left[\frac{a}{n} ; \frac{b}{n} \right]$; une fréquence hors de cet intervalle remet l'hypothèse en cause.

Le livre de cours de maths 1ère

Tout le programme en un seul PDF de 103 pages, à imprimer ou à garder sur ta tablette.

Voir le livre

Zyro te conseille la suite

 Exercices de maths

Variables aléatoires : exercices de maths
1ère

 Contrôles de maths

Variables aléatoires : contrôle de maths
1ère

 QCM de maths

Variables aléatoires : QCM de maths
1ère

 Exercices de maths

Algorithmique et Python : exercices de
maths 1ère

 Exercices de maths

Second degré : exercices de maths 1ère

 Contrôles de maths

Algorithmique et Python : contrôle de
maths 1ère

Zyro vous emmène sur nos sites partenaires

Embarquez pour d'autres planètes du savoir et leurs applis.

Décollage