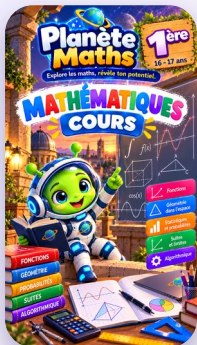


Fonctions trigonométriques : cours de maths Terminale à télécharger en PDF



Le livre de cours de maths Terminale

Tout le programme en un seul PDF de 103 pages, à imprimer ou à garder sur ta tablette.

[Voir le livre](#)

Le mouvement d'une balançoire, la hauteur d'une marée, le courant alternatif d'une prise : tous ces phénomènes se répètent à l'identique, tour après tour. Les fonctions **sinus** et **cosinus** sont les outils mathématiques de ces répétitions. Dans ce chapitre, tu vas les voir comme des fonctions de la variable réelle, étudier leurs symétries, les dériver, résoudre des équations et découvrir une limite incontournable.

1. Radian et cercle trigonométrique

D Cercle trigonométrique et radian

Dans un repère orthonormé $(O; I, J)$, le **cercle trigonométrique** est le cercle de centre O et de rayon 1 , orienté dans le sens direct (sens inverse des aiguilles d'une montre). Un angle mesure **1 radian** lorsqu'il intercepte sur ce cercle un arc de longueur 1 .

Le cercle a pour périmètre 2π , donc un tour complet mesure 2π radians. On en déduit la correspondance fondamentale : $\pi \text{ rad} = 180^\circ$. Pour convertir, on utilise la proportionnalité : x degrés correspondent à $\frac{x\pi}{180}$ radians.

À tout réel θ , on associe le point M du cercle obtenu en enroulant la droite des réels autour du cercle : on part de I et on parcourt une longueur $|\theta|$, dans le sens direct si $\theta > 0$, dans le sens indirect sinon. Deux réels qui diffèrent d'un multiple de 2π donnent le même point.

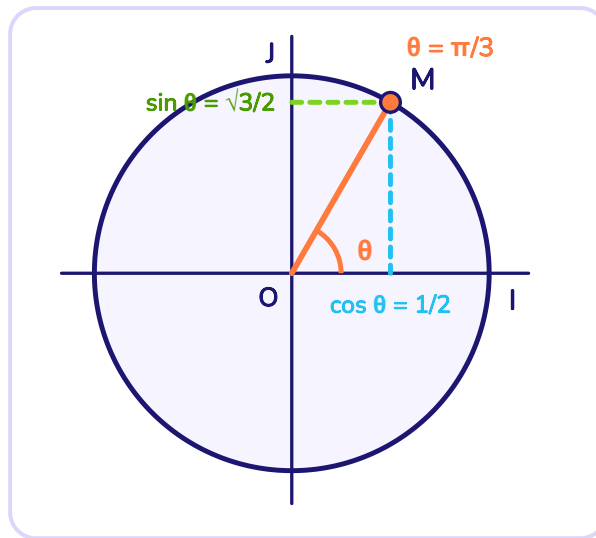
P Longueur d'arc

Sur un cercle de rayon r , un angle de mesure θ radians intercepte un arc de longueur $r\theta$.

2. Cosinus et sinus d'un réel

D Cosinus et sinus

Si M est le point du cercle trigonométrique associé au réel θ , alors **cos θ** est l'**abscisse** de M et **sin θ** son **ordonnée** : $M(\cos \theta; \sin \theta)$.



Comme M est sur le cercle de rayon 1 , on obtient immédiatement deux faits : pour tout réel θ , $-1 \leq \cos \theta \leq 1$, $-1 \leq \sin \theta \leq 1$ et

$$\cos^2 \theta + \sin^2 \theta = 1.$$

Voici les valeurs à connaître par cœur :

θ	0	$\frac{\pi}{6}$	$\frac{\pi}{4}$	$\frac{\pi}{3}$	$\frac{\pi}{2}$
$\cos \theta$	1	$\frac{\sqrt{3}}{2}$	$\frac{\sqrt{2}}{2}$	$\frac{1}{2}$	0
$\sin \theta$	0	$\frac{1}{2}$	$\frac{\sqrt{2}}{2}$	$\frac{\sqrt{3}}{2}$	1



Astuce de Zyro

Sur ma planète, on retient la ligne du cosinus en lisant $\frac{\sqrt{3}}{2}$, $\frac{\sqrt{2}}{2}$, $\frac{1}{2}$ pour $\frac{\pi}{6}$, $\frac{\pi}{4}$, $\frac{\pi}{3}$: les numérateurs $\sqrt{3}$, $\sqrt{2}$, $\sqrt{1}$ décroissent. La ligne du sinus est la même, lue à l'envers !

3. Parité et périodicité

P

Propriétés

Pour tout réel x et tout entier relatif k :

- $\cos(-x) = \cos x$: le cosinus est **pair** ; $\sin(-x) = -\sin x$: le sinus est **impair** ;
- $\cos(x + 2k\pi) = \cos x$ et $\sin(x + 2k\pi) = \sin x$: les deux fonctions sont **périodiques de période 2π** ;
- $\cos(\pi - x) = -\cos x$, $\sin(\pi - x) = \sin x$, $\cos(x + \pi) = -\cos x$,
 $\sin(x + \pi) = -\sin x$;
- $\cos\left(\frac{\pi}{2} - x\right) = \sin x$ et $\sin\left(\frac{\pi}{2} - x\right) = \cos x$.

Ces relations viennent des symétries du cercle : $-\theta$ donne le symétrique de M par rapport à l'axe des abscisses, $\pi - \theta$ son symétrique par rapport à l'axe des ordonnées. La parité se lit sur les courbes : celle du cosinus est symétrique par rapport à l'axe des ordonnées, celle du sinus par rapport à l'origine. La périodicité permet d'étudier une fonction sur un seul intervalle de longueur 2π , puis de « recopier » la courbe.



Fonctions trigonométriques Terminale : courbes des fonctions sinus en violet et cosinus en orange sur l'intervalle de moins 2π à 2π , avec leurs oscillations entre -1 et 1

ESe ramener à l'intervalle $]-\pi; \pi]$ Calcule $\cos \frac{17\pi}{6}$ et $\sin \frac{17\pi}{6}$.On a $\frac{17\pi}{6} = \frac{12\pi}{6} + \frac{5\pi}{6} = 2\pi + \frac{5\pi}{6}$. Par périodicité,

$$\cos \frac{17\pi}{6} = \cos \frac{5\pi}{6} = \cos\left(\pi - \frac{\pi}{6}\right) = -\cos \frac{\pi}{6} = -\frac{\sqrt{3}}{2}.$$

$$\text{De même } \sin \frac{17\pi}{6} = \sin \frac{5\pi}{6} = \sin \frac{\pi}{6} = \frac{1}{2}.$$

4. Dérivées de sinus et cosinus

P

Dérivées

Les fonctions sinus et cosinus sont dérivables sur $\mathbb{R}$ et, pour tout réel x :

$$\sin'(x) = \cos x \quad \cos'(x) = -\sin x.$$

Plus généralement, pour deux réels a et b : $(\sin(ax + b))' = a \cos(ax + b)$ et $(\cos(ax + b))' = -a \sin(ax + b)$.

E

Dériver

Soit $f(x) = x \sin x + \cos(2x)$. On dérive le produit $x \sin x$ avec $(uv)' = u'v + uv'$:

$$f'(x) = 1 \times \sin x + x \cos x - 2 \sin(2x) = \sin x + x \cos x - 2 \sin(2x).$$



Piège

Le signe moins est dans la dérivée du **cosinus**, pas du sinus. Et n'oublie pas le coefficient **a** quand l'argument est **$ax + b$** : la dérivée de **$\sin(3x)$** est **$3 \cos(3x)$** , et non **$\cos(3x)$** .

5. Étude de variations



Méthode

1. Précise l'intervalle d'étude (utilise parité et périodicité pour le réduire).
2. Calcule **$f'(x)$** et factorise-la si possible.
3. Étudie le signe de **f'** en résolvant une équation ou une inéquation trigonométrique.
4. Dresse le tableau de variations avec les valeurs aux bornes et aux points particuliers.

E

Étude d'une fonction

Étudions $f(x) = \sin x + \cos x$ sur $[0; \pi]$. On a $f'(x) = \cos x - \sin x$. Sur $[0; \pi]$,
 $f'(x) = 0 \iff \cos x = \sin x \iff x = \frac{\pi}{4}$. De plus $f'(0) = 1 > 0$ et
 $f'(\pi) = -1 < 0$: f' est positive avant $\frac{\pi}{4}$ et négative après.

x	0	$\frac{\pi}{4}$	π
signe de $f'(x)$	+	0	−
variations de f	1 ↗	$\sqrt{2}$	↘ −1

Ainsi f admet un maximum $f\left(\frac{\pi}{4}\right) = \frac{\sqrt{2}}{2} + \frac{\sqrt{2}}{2} = \sqrt{2}$ en $\frac{\pi}{4}$.

6. Équations trigonométriques

P

Équations de base

Pour des réels x et a :

- $\cos x = \cos a \iff x = a + 2k\pi$ ou $x = -a + 2k\pi$, avec $k \in \mathbb{Z}$;
- $\sin x = \sin a \iff x = a + 2k\pi$ ou $x = \pi - a + 2k\pi$, avec $k \in \mathbb{Z}$.

ERésoudre dans $[0 ; 2\pi[$

Résous $2 \sin x = -\sqrt{2}$. On a $\sin x = -\frac{\sqrt{2}}{2} = \sin\left(-\frac{\pi}{4}\right)$, donc $x = -\frac{\pi}{4} + 2k\pi$ ou $x = \pi + \frac{\pi}{4} + 2k\pi = \frac{5\pi}{4} + 2k\pi$.

Dans $[0 ; 2\pi[$, on garde $x = \frac{7\pi}{4}$ (pour $k = 1$ dans la première famille) et $x = \frac{5\pi}{4}$ (pour $k = 0$ dans la seconde). L'ensemble des solutions est $\left\{ \frac{5\pi}{4} ; \frac{7\pi}{4} \right\}$.

Pour une équation plus riche, comme $2 \cos^2 x - 3 \cos x + 1 = 0$, on pose $X = \cos x$, on résout l'équation du second degré en X , puis on revient aux équations de base.

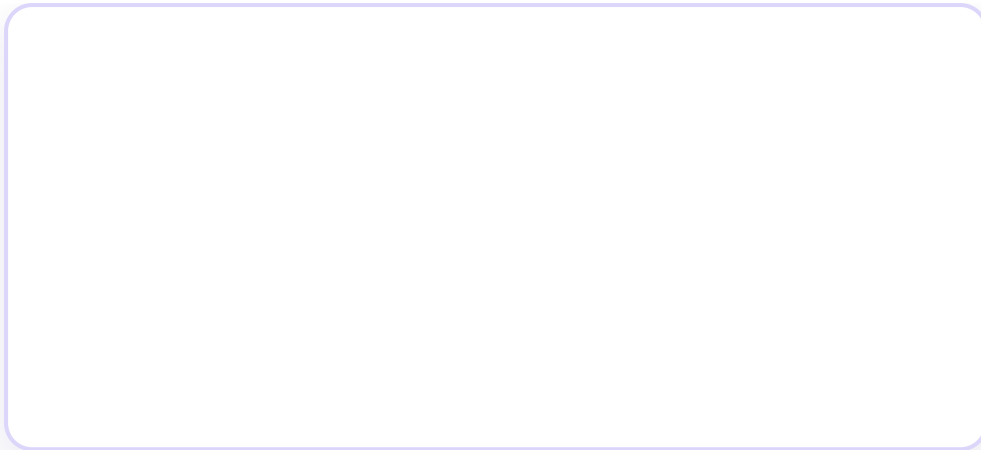
7. Limite de $\sin(x)/x$ en 0

P

Limites usuelles

$$\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\sin x}{x} = 1 \quad \lim_{x \rightarrow 0} \frac{\cos x - 1}{x} = 0.$$

Ces deux résultats sont des nombres dérivés déguisés : $\frac{\sin x}{x} = \frac{\sin x - \sin 0}{x - 0}$ tend vers $\sin'(0) = \cos 0 = 1$, et $\frac{\cos x - 1}{x} = \frac{\cos x - \cos 0}{x - 0}$ tend vers $\cos'(0) = -\sin 0 = 0$. En l'infini, l'encadrement $-1 \leq \sin x \leq 1$ et le théorème des gendarmes donnent $\lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{\sin x}{x} = 0$.



Fonctions trigonométriques Terminale : courbe de $\sin(x)/x$ qui vaut 1 en 0 puis oscille de moins en moins entre les courbes $1/x$ et $-1/x$, tendant vers 0 en l'infini

E

Calculer une limite

Détermine $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\sin(3x)}{x}$.

Pour $x \neq 0$, $\frac{\sin(3x)}{x} = 3 \times \frac{\sin(3x)}{3x}$. En posant $X = 3x$, $X \rightarrow 0$ quand $x \rightarrow 0$ et $\frac{\sin X}{X} \rightarrow 1$. La limite vaut donc **3**.

À retenir

- $\pi \text{ rad} = 180^\circ$; sur un cercle de rayon r , un angle de θ rad intercepte un arc de longueur $r\theta$.
- $M(\cos \theta; \sin \theta)$ et $\cos^2 \theta + \sin^2 \theta = 1$; connais le tableau des valeurs en $0, \frac{\pi}{6}, \frac{\pi}{4}, \frac{\pi}{3}, \frac{\pi}{2}$.
- Cosinus pair, sinus impair, tous deux de période 2π .
- $\sin' = \cos$, $\cos' = -\sin$, et $(\sin(ax + b))' = a \cos(ax + b)$.
- $\cos x = \cos a \iff x = \pm a + 2k\pi$; $\sin x = \sin a \iff x = a + 2k\pi$ ou $x = \pi - a + 2k\pi$.
- $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\sin x}{x} = 1$: à utiliser avec $\frac{\sin(ax)}{x} \rightarrow a$.

Le livre de cours de maths Terminale

Tout le programme en un seul PDF de 103 pages, à imprimer ou à garder sur ta tablette.

Voir le livre



Entraîne-toi : défi express de Terminale

Changer de niveau

Niveau : Terminale

6 questions au hasard, correction tout de suite.



Lancer le défi

 Zyro te conseille la suite

 Exercices de maths

Fonctions trigonométriques : exercices de maths Terminale

 Contrôles de maths

Fonctions trigonométriques : contrôle de maths Terminale

 QCM de maths

Fonctions trigonométriques : QCM de maths Terminale

 Exercices de maths

Géométrie dans l'espace : exercices de maths Terminale

 Exercices de maths

 Contrôles de maths

Combinatoire et dénombrement :
exercices de maths Terminale

Géométrie dans l'espace : contrôle de
maths Terminale

Zyro vous emmène sur nos sites partenaires

Embarquez pour d'autres planètes du savoir et leurs applis.

Décollage