

Transformations et homothéties : cours de maths 3ème à télécharger en PDF



Le livre de cours de maths 3ème

Tout le programme en un seul PDF de 109 pages, à imprimer ou à garder sur ta tablette.

[Voir le livre](#)

Un reflet dans l'eau, une roue qui tourne, un photocopieur qui agrandit une affiche, un papier peint qui répète le même motif : toutes ces situations déplacent ou transforment une figure. En 3ème, tu réunis les **transformations du plan** et tu découvres l'**homothétie**, celle qui agrandit ou réduit sans déformer. À la fin du chapitre, tu sauras prévoir ce qui change et ce qui ne change pas.

1. Transformer une figure

Une **transformation** associe à chaque point M du plan un point M' appelé son **image**. Quand on transforme tous les points d'une figure, on obtient la figure image. Les cinq transformations de ce chapitre sont la translation, la symétrie axiale, la symétrie centrale, la rotation et l'homothétie.

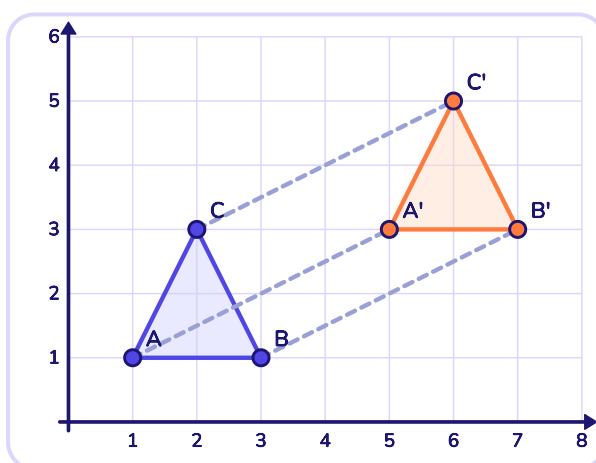
D Ce qu'on cherche à savoir

Pour chaque transformation, deux questions : comment construit-on l'image d'un point, et quelles propriétés de la figure sont **conservées** (longueurs, angles, aires, alignement, parallélisme) ?

2. La translation

D Translation

Une translation fait glisser toute la figure dans **une même direction**, dans **un même sens** et sur **une même longueur**. Le segment qui joint un point à son image a donc toujours la même direction, le même sens et la même longueur.



Sur la figure, chaque point glisse de 4 carreaux vers la droite et de 2 carreaux vers le haut. Les segments $[AA']$, $[BB']$ et $[CC']$ sont parallèles et de même longueur.

P**Ce qui est conservé**

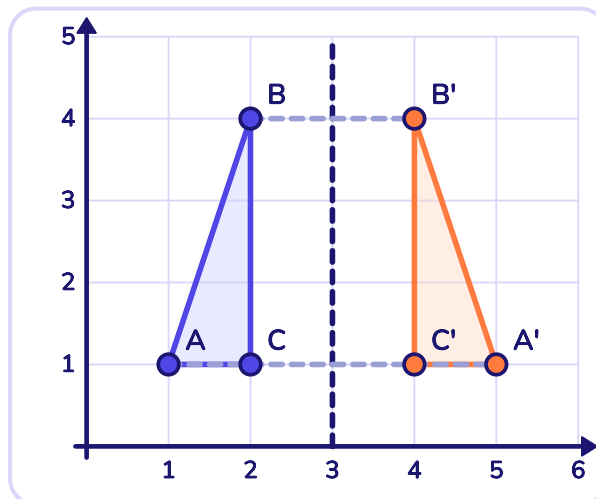
Une translation conserve les longueurs, les angles, les aires, le parallélisme et l'alignement. Un segment a pour image un segment de même longueur et **parallèle** au premier.

E**Exemple 1**

Dans un repère, une translation déplace chaque point de 4 unités vers la droite et de 2 unités vers le haut. L'image de $M(-2; 4)$ a pour abscisse $-2 + 4 = 2$ et pour ordonnée $4 + 2 = 6$: $M'(2; 6)$.

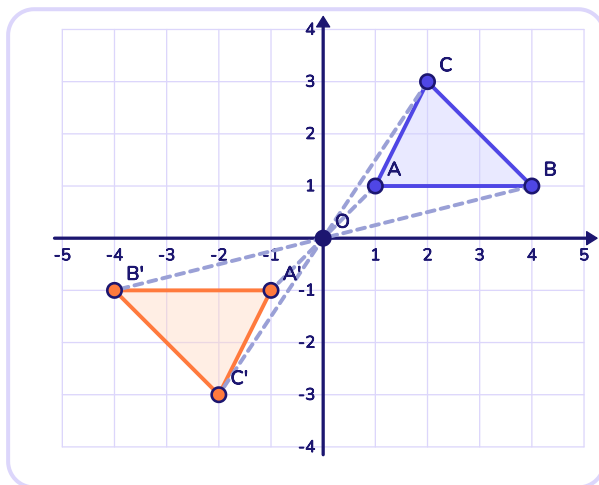
3. Les symétries axiale et centrale**D****Symétrie axiale**

Le symétrique d'un point M par rapport à une droite d est le point M' tel que d soit la **médiatrice** de $[MM']$. Un point de l'axe est son propre symétrique.



D Symétrie centrale

Le symétrique d'un point M par rapport à un point O est le point M' tel que O soit le **milieu** de $[MM']$. Faire une symétrie centrale revient à tourner d'un demi-tour autour de O .



Ces deux symétries conservent les longueurs, les angles, les aires, le parallélisme et l'alignement. Dans un repère, le symétrique de $(x ; y)$ par rapport à l'origine est $(-x ; -y)$.



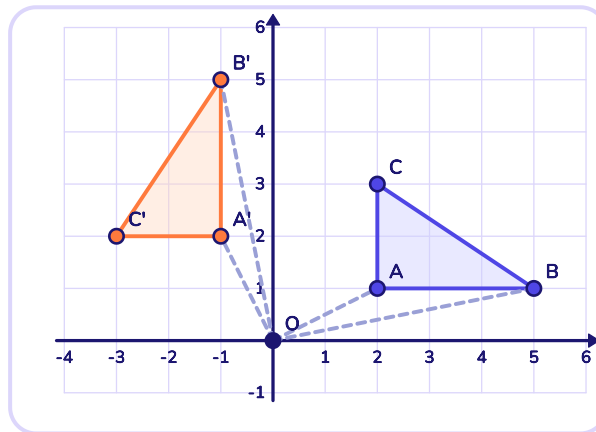
Attention

La symétrie axiale **retourne** la figure (le sens de lecture est inversé), alors que la symétrie centrale, la translation et la rotation la laissent « à l'endroit ».

4. La rotation

D Rotation

Une rotation est définie par un **centre** O , un **angle** et un **sens** (sens des aiguilles d'une montre ou sens inverse). L'image M' d'un point M vérifie $OM' = OM$ et l'angle $\widehat{MOM'}$ est égal à l'angle de la rotation.



Sur la figure, la rotation de centre O d'un quart de tour (90°) dans le sens inverse des aiguilles d'une montre envoie $A(2; 1)$ sur $A'(-1; 2)$. On vérifie que $OA^2 = 2^2 + 1^2 = 5$ et $OA'^2 = (-1)^2 + 2^2 = 5$: les distances au centre sont égales. Une rotation conserve les longueurs, les angles et les aires.

E Exemple 2

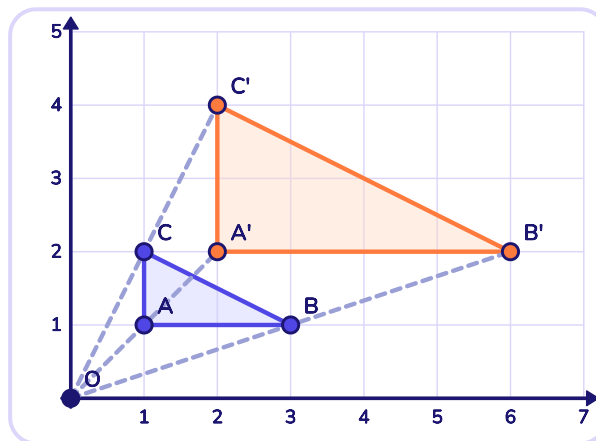
Le point M est à 6 cm de O . Son image par la rotation de centre O et d'angle 60° est un point M' tel que $OM' = 6$ cm et $\widehat{MOM'} = 60^\circ$. Le triangle OMM' est isocèle en O avec un angle de 60° au sommet : il est équilatéral et $MM' = 6$ cm.

5. L'homothétie de rapport k

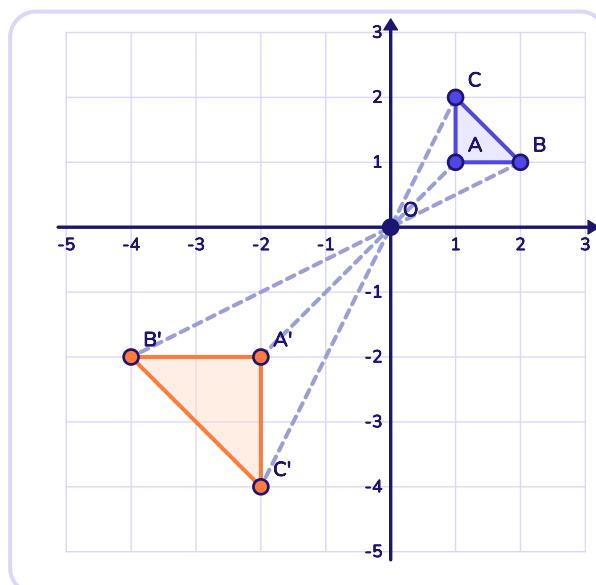
D Homothétie

L'homothétie de centre O et de rapport k (nombre non nul) transforme M en M' tel que : O , M et M' sont alignés, $OM' = |k| \times OM$, et M' est du même côté de O que M si $k > 0$, de l'autre côté si $k < 0$.

Rapport positif. Si $k > 1$, la figure est agrandie ; si $0 < k < 1$, la figure est réduite.



Rapport négatif. L'image est de l'autre côté du centre, et la figure paraît retournée (comme avec une symétrie centrale). Avec $k = -1$, on retrouve exactement la symétrie centrale.



M**Méthode : construire l'image d'un point**

1. Trace la droite (OM) .
2. Calcule la distance $OM' = |k| \times OM$.
3. Place M' sur la demi-droite $[OM)$ si $k > 0$, sur la demi-droite opposée si $k < 0$.
4. Pour une figure, construis l'image de chaque sommet puis relie-les dans le même ordre.

E**Exemple 3**

Soit h l'homothétie de centre O et de rapport 3 , avec $OA = 2,5$ cm et $AB = 1,8$ cm. Alors $OA' = 3 \times 2,5 = 7,5$ cm et $A'B' = 3 \times 1,8 = 5,4$ cm. Avec le rapport $-0,5$ et $OM = 8$ cm, on obtient $OM' = 0,5 \times 8 = 4$ cm, de l'autre côté de O .

6. Effet sur les longueurs, les angles et les aires**P****Propriétés de l'homothétie de rapport k**

Les **longueurs** sont multipliées par $|k|$ (le périmètre aussi). Les **angles** sont conservés, ainsi que le parallélisme et l'alignement. Les **aires** sont multipliées par k^2 et les **volumes** par $|k|^3$.

E**Exemple 4**

Un triangle d'aire 40 cm^2 est agrandi avec le rapport $1,5$. Son aire devient $40 \times 1,5^2 = 40 \times 2,25 = 90 \text{ cm}^2$. Un cube de volume 8 cm^3 réduit avec le rapport $0,5$ a un volume de $8 \times 0,5^3 = 1 \text{ cm}^3$.

**Erreur classique**

Doubler les longueurs ne double pas l'aire : elle est multipliée par $2^2 = 4$. Le rapport des aires est le **carré** du rapport des longueurs, même si k est négatif.

**Astuce de Zyro**

Sur ma planète, on agrandit les cartes avec un rapport k . Pour ne rien oublier : longueurs $\times |k|$, aires $\times k^2$, volumes $\times |k|^3$; plus la dimension est grande, plus la puissance l'est aussi !

7. Figures semblables**D****Figures semblables**

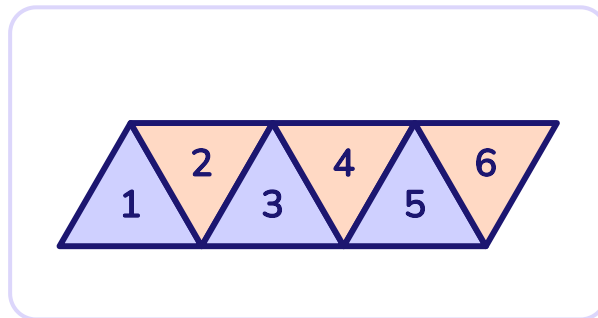
Deux figures sont semblables lorsque l'une est l'image de l'autre par une succession de transformations (translations, symétries, rotations) et d'une homothétie. Elles ont la même forme et leurs **angles sont égaux deux à deux**, leurs **longueurs correspondantes sont proportionnelles**.

Pour savoir si deux triangles sont semblables, on classe les côtés dans l'ordre croissant et on compare les quotients. Le triangle de côtés **3, 4 et 5** et celui de côtés **6, 8 et 10** sont semblables, car $\frac{6}{3} = \frac{8}{4} = \frac{10}{5} = 2$. Deux triangles qui ont leurs angles égaux deux à deux sont aussi semblables.

Dans une configuration où (MN) est parallèle à (BC) , le triangle AMN est l'image de ABC par l'homothétie de centre A et de rapport $\frac{AM}{AB}$. On retrouve la proportionnalité de Thalès.

8. Frises et pavages

Une **frise** est une bande où un motif se répète par translation, parfois avec des symétries. Un **pavage** recouvre le plan avec des figures identiques, sans trou ni chevauchement.



Sur la frise de triangles, le triangle 3 est l'image du triangle 1 par une translation ; le triangle 2 est l'image du triangle 1 par la symétrie centrale de centre le milieu du côté commun.

P

Pavages réguliers

Un polygone régulier pave le plan à lui seul si l'angle intérieur divise 360° . Les angles valent 60° pour le triangle équilatéral, 90° pour le carré et 120° pour l'hexagone régulier : ils conviennent, car $360 = 6 \times 60 = 4 \times 90 = 3 \times 120$. Le pentagone régulier (108°) ne convient pas.

À retenir

- Translation, rotation, symétries axiale et centrale **conservent** longueurs, angles et aires.
- Homothétie de centre O et de rapport k : $OM' = |k| \times OM$, même côté de O si $k > 0$, côté opposé si $k < 0$.
- Longueurs $\times |k|$, aires $\times k^2$, volumes $\times |k|^3$, angles inchangés.
- Deux figures semblables ont les mêmes angles et des longueurs proportionnelles.
- Une frise répète un motif ; parmi les polygones réguliers, seuls le triangle équilatéral, le carré et l'hexagone pavent le plan à eux seuls.

Le livre de cours de maths 3ème

Tout le programme en un seul PDF de 109 pages, à imprimer ou à garder sur ta tablette.

Voir le livre



Entraîne-toi : défi express de 3ème

Changer de niveau

Niveau : 3ème

6 questions au hasard, correction tout de suite.



Lancer le défi

 Zyro te conseille la suite

 Exercices de maths

Transformations et homothéties :
exercices de maths 3ème

 Contrôles de maths

Transformations et homothéties :
contrôle de maths 3ème

 QCM de maths

Transformations et homothéties : QCM
de maths 3ème

 Exercices de maths

Géométrie dans l'espace : exercices de
maths 3ème

 Exercices de maths

Statistiques : exercices de maths 3ème

 Contrôles de maths

Géométrie dans l'espace : contrôle de
maths 3ème

Zyro vous emmène sur nos sites partenaires

Embarquez pour d'autres planètes du savoir et leurs applis.

Décollage