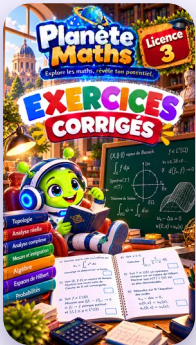


Topologie des espaces métriques : exercices de maths Licence L3 à télécharger en PDF



Le livre d'exercices corrigés de maths Licence L3

Tout le programme en un seul PDF de 126 pages, à imprimer ou à garder sur ta tablette.

[Voir le livre](#)

21 exercices classés par difficulté (★ facile, ★★ moyen, ★★★ difficile). Cherche d'abord sans regarder le corrigé !

1 Distance discrète

★ ★ ★

Sur un ensemble E , on pose $d(x, y) = 0$ si $x = y$ et $d(x, y) = 1$ sinon.

- Montrer que d est une distance.
- Décrire $B(a, \frac{1}{2})$ et $B(a, 2)$.
- En déduire que toute partie de E est ouverte.

2 Calculer trois normes

★ ★ ★

Dans $\mathbb{R}^3$, calculer $\|x\|_1$, $\|x\|_2$ et $\|x\|_\infty$ pour $x = (3, -4, 12)$, puis vérifier la chaîne d'inégalités $\|x\|_\infty \leq \|x\|_2 \leq \|x\|_1 \leq 3\|x\|_\infty$.

3 Ni ouvert ni fermé



Montrer que $]0, 1]$ n'est ni ouvert ni fermé dans $\mathbb{R}$.

4 Intérieur, adhérence, frontière



Déterminer l'intérieur, l'adhérence et la frontière de $A =]-2, 1[\cup]1, 4] \cup \{6\}$ dans $\mathbb{R}$.

5 Une suite du plan



Dans $(\mathbb{R}^2, \|\cdot\|_\infty)$, on pose $u_n = (\frac{1}{n}, 1 + \frac{1}{n^2})$. Montrer que $u_n \rightarrow (0, 1)$ et trouver le plus petit entier N tel que $n \geq N \Rightarrow \|u_n - (0, 1)\|_\infty < 10^{-2}$.

6 Image réciproque de la valeur absolue



Montrer que $x \mapsto |x|$ est continue, puis que $\{x \in \mathbb{R} : |x| > 1\}$ est ouvert et $\{x : |x| \leq 1\}$ est fermé.

7 Compact ou non ?



Dire, avec une justification brève, lesquelles de ces parties de $\mathbb{R}$ sont compactes : $[-2, 5]$, $]0, 1]$, $\mathbb{Z}$, $[0, 1] \cup \{7\}$, $\mathbb{Q} \cap [0, 1]$.

8 Une distance bornée sur $\mathbb{R}$



On pose $\varphi(x) = \frac{x}{1 + |x|}$ et $d(x, y) = |\varphi(x) - \varphi(y)|$ pour $x, y \in \mathbb{R}$.

- Montrer que φ est injective, puis que d est une distance.
- Calculer $d(1, 3)$ et $d(0, n)$.
- Montrer que $\mathbb{R}$ est borné pour d .

9

Aires des boules unité

★★★

Calculer l'aire de la boule unité fermée de $\mathbb{R}^2$ pour $\|\cdot\|_1$, $\|\cdot\|_2$ et $\|\cdot\|_\infty$, et vérifier que ces boules sont emboîtées.

10

Un ouvert du plan

★★★

Montrer que $U = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 : x > 0 \text{ et } y < x^2\}$ est ouvert. Le point $(1, 0)$ est-il dans U ? Le point $(1, 1)$?

11

Un fermé non compact et non connexe

★★★

Soit $F = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 : xy \geq 1\}$. Montrer que F est fermé, qu'il n'est pas compact, et qu'il n'est pas connexe.

12

Valeurs d'adhérence

★★★

Soit $u_n = (-1)^n + \frac{1}{n}$ pour $n \geq 1$. Déterminer ses valeurs d'adhérence et conclure sur la convergence.

13

L'intervalle $]0, 1]$ n'est pas complet

★★★

Montrer que la suite $x_n = \frac{1}{n}$ est de Cauchy dans $]0, 1]$ muni de la distance usuelle, mais ne converge pas dans $]0, 1]$. Que conclure ?

14 Itérations d'une contraction



Soit $f(x) = 1 + \frac{x}{3}$ sur $\mathbb{R}$ et $u_0 = 0$, $u_{n+1} = f(u_n)$.

- Montrer que f est contractante et trouver son point fixe.
- Calculer $u_1, \dots, u_5$.
- Combien d'itérations garantissent une erreur inférieure à 10^{-3} ?

15 Valeurs intermédiaires et trois racines



Soit $p(x) = x^3 - 3x + 1$. Montrer par connexité que p possède exactement trois racines réelles et les localiser dans trois intervalles de longueur 1.

16 Réunion, intersection et adhérence



Soient $A, B \subset E$.

- Montrer que $\overline{A \cup B} = \overline{A} \cup \overline{B}$.
- Montrer que $\overline{A \cap B} \subset \overline{A} \cap \overline{B}$ et donner un exemple où l'inclusion est stricte.

17 Normes non équivalentes



Sur $C([0, 1], \mathbb{R})$, on pose $\|f\|_\infty = \sup |f|$ et $\|f\|_1 = \int_0^1 |f|$. On considère $f_n(x) = x^n$.

- Calculer $\|f_n\|_\infty$ et $\|f_n\|_1$.
- Montrer qu'il n'existe pas de constante $c > 0$ telle que $\|f\|_\infty \leq c\|f\|_1$ pour toute f .
- À partir de quel n a-t-on $\|f_n\|_1 \leq 0,01$?

18 Maximum sur un disque

★★★

Soit $D = \{(x, y) : x^2 + y^2 \leq 1\}$ et $f(x, y) = x + 2y$.

- Justifier que f atteint un maximum sur D .
- Le calculer et donner le point où il est atteint.

19 Distance à une partie

★★★

Pour $A \subset \mathbb{R}$ non vide, on note $d(x, A) = \inf_{a \in A} |x - a|$. On prend $A =]1, 3[\cup \{5\}$.

- Calculer $d(4, A)$, $d(3, A)$, $d(3,5; A)$.
- Montrer que $x \mapsto d(x, A)$ est 1-lipschitzienne, et que $d(x, A) = 0 \iff x \in \overline{A}$.

20 Point fixe du cosinus

★★★

On définit $x_0 = 1$ et $x_{n+1} = \cos x_n$.

- Justifier que (x_n) converge vers l'unique solution ℓ de $\cos x = x$ dans $[0, 1]$.
- Avec $k = \sin 1 \approx 0,8415$ et $|x_1 - x_0| = 1 - \cos 1 \approx 0,4597$, quel n assure $|x_n - \ell| \leq 10^{-2}$ d'après la majoration du cours ?

21 $\mathbb{R}$ et $\mathbb{R}^2$ ne sont pas homéomorphes

★★★

Montrer que $\mathbb{R}^2 \setminus \{(0, 0)\}$ est connexe par arcs, que $\mathbb{R} \setminus \{0\}$ n'est pas connexe, et en déduire qu'il n'existe pas d'homéomorphisme entre $\mathbb{R}$ et $\mathbb{R}^2$.

Le livre d'exercices corrigés de maths Licence L3

Tout le programme en un seul PDF de 126 pages, à imprimer ou à garder sur ta tablette.

Voir le livre

Zyro te conseille la suite

Exercices corrigés de maths

Topologie des espaces métriques :
exercices corrigés de maths Licence L3

Cours de maths

Topologie des espaces métriques : cours
de maths Licence L3

QCM de maths

Topologie des espaces métriques : QCM
de maths Licence L3

Exercices corrigés de maths

Espaces complets et point fixe : exercices
corrigés de maths Licence L3

✓ **Exercices corrigés de maths**

Mesure et intégrale de Lebesgue :
exercices corrigés de maths Licence L3

■ **Cours de maths**

Espaces complets et point fixe : cours de
maths Licence L3

Zyro vous emmène sur nos sites partenaires

Embarquez pour d'autres planètes du savoir et leurs applis.

Décollage