

Topologie des espaces métriques et normés : exercices de maths Licence L2 à télécharger en PDF

Le livre d'exercices corrigés de maths Licence L2

Tout le programme en un seul PDF de 128 pages, à imprimer ou à garder sur ta tablette.

Voir le livre

22 exercices classés par difficulté (★ facile, ★★ moyen, ★★★ difficile). Cherche d'abord sans regarder le corrigé !

1 Calculer des normes dans $\mathbb{R}^3$

★ ★ ★

Soit $x = (2, -3, 6)$ et $y = (-1, 1, 2)$ dans $\mathbb{R}^3$.

- Calculer $\|x\|_1$, $\|x\|_2$ et $\|x\|_\infty$.
- Calculer $\|x - y\|_1$, $\|x - y\|_2$ et $\|x - y\|_\infty$.

2 Norme ou pas norme ?

★ ★ ★

Pour chaque application de $\mathbb{R}^2$ dans $\mathbb{R}_+$, dire si c'est une norme, en justifiant :

$$N_1(x, y) = |x| + 2|y| ; N_2(x, y) = |x - y| ; N_3(x, y) = x^2 + y^2.$$

3 Boules dans $\mathbb{R}$ et aires de boules



- a. Écrire sous forme d'intervalles la boule ouverte $B(3, 2)$ et la boule fermée $B_f(-1, \frac{1}{2})$ de $\mathbb{R}$ muni de $|\cdot|$.
- b. Calculer l'aire de la boule unité de $(\mathbb{R}^2, \|\cdot\|_1)$ et celle de $(\mathbb{R}^2, \|\cdot\|_\infty)$.

4 Ouvert, fermé, ni l'un ni l'autre



Dans $\mathbb{R}$, préciser si chaque partie est ouverte, fermée, ou ni l'un ni l'autre : $A =]-2, 3[$; $B = [1, 4]$; $C =]0, 1]$; $D = \{\frac{1}{n} : n \geq 1\}$; $E = \mathbb{N}$.

5 Intérieur, adhérence, frontière



Déterminer l'intérieur, l'adhérence et la frontière dans $\mathbb{R}$ de $A =]0, 1[\cup \{2\}$ et de $B = \mathbb{Q} \cap [0, 1]$.

6 Limites de suites dans le plan



Déterminer la limite des suites de $\mathbb{R}^2$: $u_n = \left(\frac{3n+1}{n+2}, \frac{(-1)^n}{n} \right)$ et $v_n = \left(n \sin \frac{1}{n}, e^{-n} \right)$. Calculer ensuite $\|u_n - (3, 0)\|_\infty$.

7 Continuité de la norme



Montrer que $x \mapsto \|x\|$ est continue sur un espace normé. Vérifier l'inégalité sur $(\mathbb{R}^2, \|\cdot\|_2)$ pour $x = (3, 4)$ et $y = (3, 1)$; $(3, 9)$.

8

Chaîne d'inégalités entre trois normes du plan

★★★

Montrer que, pour tout $x \in \mathbb{R}^2$, $\|x\|_\infty \leq \|x\|_2 \leq \|x\|_1 \leq \sqrt{2} \|x\|_2 \leq 2\|x\|_\infty$. Pour chaque inégalité, donner un vecteur non nul réalisant l'égalité.

9

Un ouvert défini par deux inégalités

★★★

Soit $A = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 : xy > 1 \text{ et } x > 0\}$. Montrer que A est ouvert, puis qu'il n'est pas fermé.

10

Densité des nombres dyadiques

★★★

Soit $D = \left\{ \frac{m}{2^k} : m \in \mathbb{Z}, k \in \mathbb{N} \right\}$. Montrer que D est dense dans $\mathbb{R}$. En déduire que si $f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ est continue et nulle sur D , alors $f = 0$.

11

Norme d'une forme linéaire selon la norme choisie

★★★

Soit $u(x, y) = 2x - 5y$. Calculer la norme d'opérateur de $u : \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}$ lorsque $\mathbb{R}^2$ est muni de $\|\cdot\|_1$, puis de $\|\cdot\|_\infty$, puis de $\|\cdot\|_2$.

12

Parties compactes du plan

★★★

Dans $(\mathbb{R}^2, \|\cdot\|_2)$, dire si les parties suivantes sont compactes : (a) $B_f((1, 0), 2)$; (b) $\{xy = 1\}$; (c) $\{|x| + |y| < 1\}$; (d) le cercle unité $\cup \{(5, 5)\}$; (e) $\{(x, \sin x) : x \in [0, 10]\}$.

13 Suites de Cauchy : une série et la série harmonique



On pose $u_n = \sum_{k=1}^n \frac{1}{k^2}$ et $H_n = \sum_{k=1}^n \frac{1}{k}$.

- Montrer que pour $m > n \geq 1$, $\setminus(0$
- Montrer que $H_{2n} - H_n \geq \frac{1}{2}$ et conclure que (H_n) n'est pas de Cauchy.

14 Le plan privé de l'origine est connexe par arcs



Montrer que $\mathbb{R}^2 \setminus \{0\}$ est connexe par arcs, et que $\mathbb{R} \setminus \{0\}$ ne l'est pas.

15 Normes non équivalentes sur les fonctions continues



Dans $C([0, 1])$, on pose $g_n(t) = \max(0, 1 - nt)$. Calculer $\|g_n\|_\infty$ et $\|g_n\|_1$. Les normes $\|\cdot\|_\infty$ et $\|\cdot\|_1$ sont-elles équivalentes ?

16 Distance discrète



Sur un ensemble E à au moins deux éléments, on pose $d(x, y) = 1$ si $x \neq y$ et $d(x, x) = 0$.

- Décrire $B(a, 1)$, $B(a, 2)$ et $B_f(a, 1)$.
- Montrer que toute partie est à la fois ouverte et fermée.
- Quelles sont les suites convergentes ? Comparer $\overline{B(a, 1)}$ et $B_f(a, 1)$.

17 Une distance qui rend $\mathbb{R}$ non complet

★★★

Pour $x, y \in \mathbb{R}$, on pose $d(x, y) = |\arctan x - \arctan y|$.

- Montrer que d est une distance sur $\mathbb{R}$.
- Déterminer $B(0, \frac{\pi}{4})$.
- Montrer que la suite $(n)_{n \geq 0}$ est de Cauchy pour d mais ne converge pas dans $(\mathbb{R}, d)$.

18 Un maximum sur un compact défini par deux contraintes

★★★

Soit $F = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 : x^2 + y^2 \leq 4 \text{ et } y \geq x^2 - 2\}$.

- Montrer que F est compact.
- Montrer que $f(x, y) = x$ atteint un maximum sur F et le déterminer.

19 Forme linéaire continue ou non selon la norme

★★★

Sur $E = C([0, 1])$, on pose $\varphi(f) = \int_0^1 f(t) dt$ et $\psi(f) = f(\frac{1}{2})$.

- Avec $\|\cdot\|_\infty$, montrer que φ et ψ sont continues et calculer leurs normes.
- Avec $\|\cdot\|_1$, montrer que φ est continue de norme 1, mais que ψ n'est pas continue (utiliser $f_n(t) = \max(0, 1 - n|t - \frac{1}{2}|)$, $n \geq 2$).

20 Point fixe de $x \mapsto 1 + \frac{1}{1+x^2}$

★★★

Soit $f(x) = 1 + \frac{1}{1+x^2}$ sur $F = [1, 2]$.

- Montrer que $f(F) \subset F$ et que f est $\frac{1}{2}$ -lipschitzienne.
- En déduire que f a un unique point fixe ℓ et que ℓ est racine de $x^3 - x^2 + x - 2$.
Situer ℓ dans $[1,35; 1,36]$.
- Pour $u_0 = 1$, calculer u_1, u_2 , et trouver n assurant $|u_n - \ell| < 10^{-3}$.

21

Image d'un cercle par une forme linéaire

★★★

Soit $\mathcal{C}$ le cercle unité de $\mathbb{R}^2$ et $f(x, y) = x + 2y$.

- Montrer que $\mathcal{C}$ est connexe par arcs.
- En déduire que $f(\mathcal{C})$ est un intervalle et le déterminer.

22

 $(C([0, 1]), \|\cdot\|_1)$ n'est pas complet

★★★

Pour $n \geq 2$, soit f_n la fonction continue de $[0, 1]$ dans $\mathbb{R}$, nulle sur $[0, \frac{1}{2}]$, égale à 1 sur $[\frac{1}{2} + \frac{1}{n}, 1]$ et affine entre les deux.

- Calculer $\int_0^1 f_n$ et montrer que (f_n) est de Cauchy pour $\|\cdot\|_1$.
- Montrer qu'elle ne converge pas dans $(C([0, 1]), \|\cdot\|_1)$.

Le livre d'exercices corrigés de maths Licence L2

Tout le programme en un seul PDF de 128 pages, à imprimer ou à garder sur ta tablette.

[Voir le livre](#)**Entraîne-toi : défi express de Licence L2**[Changer de niveau](#)

Niveau : Licence L2

6 questions au hasard, correction tout de suite.

[Lancer le défi](#)

 Zyro te conseille la suite

 Exercices corrigés de maths

Topologie des espaces métriques et normés : exercices corrigés de maths Licence L2

 Cours de maths

Topologie des espaces métriques et normés : cours de maths Licence L2

 QCM de maths

Topologie des espaces métriques et normés : QCM de maths Licence L2

 Exercices corrigés de maths

Calcul différentiel à plusieurs variables : exercices corrigés de maths Licence L2

 Exercices corrigés de maths

 Cours de maths

Intégrales généralisées et à paramètre :
exercices corrigés de maths Licence L2

Calcul différentiel à plusieurs variables :
cours de maths Licence L2

Zyro vous emmène sur nos sites partenaires

Embarquez pour d'autres planètes du savoir et leurs applis.

Décollage