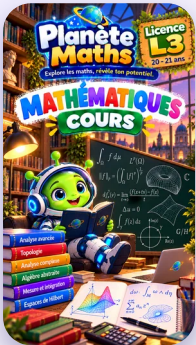


Topologie des espaces métriques : cours de maths Licence L3 à télécharger en PDF



Le livre de cours de maths Licence L3

Tout le programme en un seul PDF de 101 pages, à imprimer ou à garder sur ta tablette.

[Voir le livre](#)

Un espace métrique, c'est un ensemble muni d'une façon de mesurer des distances. Cette seule donnée suffit à définir la proximité, la limite, la continuité, et à dégager quatre propriétés structurantes : compacité, connexité, complétude, fermeture. Ce chapitre rassemble le vocabulaire et les théorèmes qui servent ensuite en analyse fonctionnelle, en calcul différentiel et en théorie de la mesure.

1. Distances et normes

D

Distance

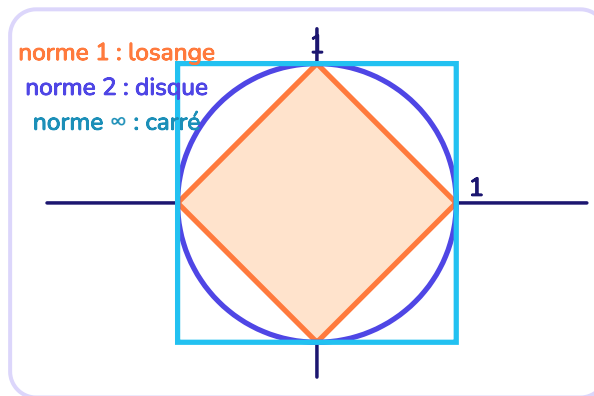
Une **distance** sur un ensemble E est une application $d : E \times E \rightarrow [0, +\infty[$ telle que pour tous $x, y, z \in E$: $d(x, y) = 0 \iff x = y$ (séparation), $d(x, y) = d(y, x)$ (symétrie), $d(x, z) \leq d(x, y) + d(y, z)$ (inégalité triangulaire). Le couple (E, d) est un **espace métrique**.

La **boule ouverte** de centre a et de rayon $r > 0$ est $B(a, r) = \{x \in E : d(a, x) < r\}$; la boule fermée utilise $\leq$. Une partie est **bornée** si elle est contenue dans une boule.

D Norme

Sur un espace vectoriel réel E , une **norme** vérifie $\|x\| = 0 \iff x = 0$,
 $\|\lambda x\| = |\lambda| \|x\|$ et $\|x + y\| \leq \|x\| + \|y\|$. Alors $d(x, y) = \|x - y\|$ est une distance.

Sur $\mathbb{R}^n$, on dispose de $\|x\|_1 = \sum |x_i|$, $\|x\|_2 = \sqrt{\sum x_i^2}$ et $\|x\|_\infty = \max |x_i|$, reliées par $\|x\|_\infty \leq \|x\|_2 \leq \|x\|_1 \leq n\|x\|_\infty$.



E Exemple 1 : une distance inattendue

Sur $\mathbb{R}$, posons $d(x, y) = |x^3 - y^3|$. La symétrie est claire. Si $d(x, y) = 0$, alors $x^3 = y^3$, donc $x = y$ car $t \mapsto t^3$ est injective. Enfin

$|x^3 - z^3| \leq |x^3 - y^3| + |y^3 - z^3|$ par l'inégalité triangulaire dans $\mathbb{R}$. C'est donc une distance. En revanche $|x^2 - y^2|$ n'en est pas une sur $\mathbb{R}$: $d(-1, 1) = 0$ avec $-1 \neq 1$.



Attention

La boule unité de $\| \cdot \|_\infty$ est un carré, celle de $\| \cdot \|_1$ un losange : ne dessine pas toujours un disque.

2. Ouverts et fermés



Ouvert, fermé

Une partie U de E est **ouverte** si pour tout $x \in U$ il existe $r > 0$ avec $B(x, r) \subset U$.
Une partie est **fermée** si son complémentaire est ouvert.



Propriétés

Toute réunion d'ouverts est ouverte ; toute intersection *finie* d'ouverts est ouverte ; $\emptyset$ et E sont ouverts. Par passage au complémentaire : toute intersection de fermés est fermée, toute réunion finie de fermés est fermée. Une boule ouverte est ouverte, une boule fermée est fermée.



Attention

Une intersection infinie d'ouverts n'est pas toujours ouverte : $\bigcap_{n \geq 1}]-\frac{1}{n}, \frac{1}{n}[= \{0\}$.
« Pas ouvert » ne veut pas dire « fermé » : $]0, 1]$ n'est ni l'un ni l'autre dans $\mathbb{R}$.

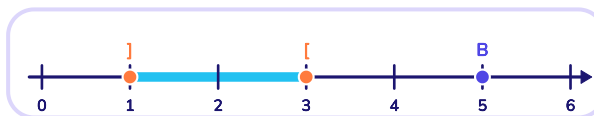
3. Adhérence et intérieur

D Adhérence, intérieur, frontière

Pour $A \subset E$: l'adhérence $\overline{A}$ est le plus petit fermé contenant A ; l'intérieur $\overset{\circ}{A}$ est le plus grand ouvert contenu dans A ; la frontière est $\partial A = \overline{A} \setminus \overset{\circ}{A}$.

P Caractérisation

$x \in \overline{A} \iff$ toute boule $B(x, r)$ rencontre $A \iff x$ est limite d'une suite d'éléments de A . De même $x \in \overset{\circ}{A} \iff$ une boule $B(x, r)$ est contenue dans A . Enfin A est dense si $\overline{A} = E$.

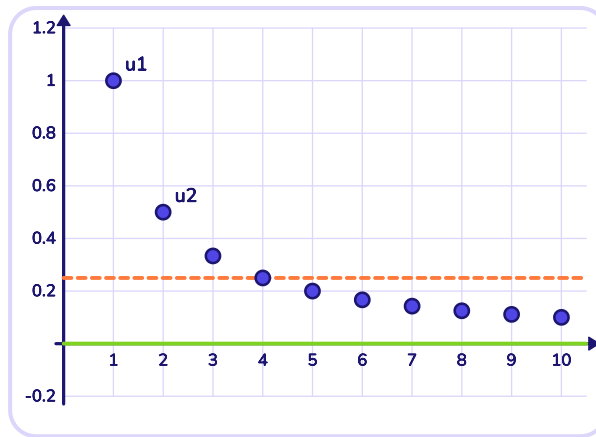


E Exemple 2 : adhérence et intérieur

Soit $A =]1, 3[\cup \{5\}$ dans $\mathbb{R}$. Tout point de $]1, 3[$ a une boule autour de lui dans A , mais 5 n'en a pas : $\overset{\circ}{A} =]1, 3[$. Les points 1 et 3 sont limites de suites de A (par exemple $1 + \frac{1}{n}$), donc $\overline{A} = [1, 3] \cup \{5\}$ et $\partial A = \{1, 3, 5\}$. Enfin $\overline{\mathbb{Q}} = \mathbb{R}$ et $\overset{\circ}{\mathbb{Q}} = \emptyset$.

4. Suites et convergence

Une suite (x_n) de E converge vers ℓ si $d(x_n, \ell) \rightarrow 0$: pour tout $\varepsilon > 0$, il existe N tel que $n \geq N \Rightarrow d(x_n, \ell) < \varepsilon$. La limite, si elle existe, est unique (deux boules disjointes séparent deux points distincts). Dans $\mathbb{R}^n$, une suite converge si et seulement si chaque coordonnée converge.



P Fermés et suites

F est fermé si et seulement si toute suite d'éléments de F qui converge dans E a sa limite dans F . Une **valeur d'adhérence** est la limite d'une suite extraite convergente.

I 5. Continuité

D Continuité

Une application $f : (E, d) \rightarrow (F, \delta)$ est continue en a si
 $\forall \varepsilon > 0 \exists \eta > 0 : d(x, a) < \eta \Rightarrow \delta(f(x), f(a)) < \varepsilon$.

P Trois formulations équivalentes

f est continue sur $E \iff$ l'image réciproque de tout ouvert est un ouvert $\iff$
 l'image réciproque de tout fermé est un fermé $\iff x_n \rightarrow x$ entraîne $f(x_n) \rightarrow f(x)$.

Une application k -lipschitzienne ($\delta(f(x), f(y)) \leq k d(x, y)$) est continue. Ainsi $x \mapsto |x|$ et $x \mapsto d(x, A)$ sont 1-lipschitziennes. Cette formulation par préimages fournit des ouverts et des

fermés à bon compte : $\{(x, y) : x^2 + y^2 < 1\}$ est ouvert comme préimage de $] - \infty, 1[$ par une application continue.

6. Compacité

D Compact

Une partie K est **compacte** si de tout recouvrement de K par des ouverts on peut extraire un sous-recouvrement fini. Dans un espace métrique, c'est équivalent à : toute suite de K possède une sous-suite qui converge dans K (Bolzano-Weierstrass).

P Propriétés

Un compact est fermé et borné. Dans $\mathbb{R}^n$ (de dimension finie), la réciproque est vraie : les compacts sont les fermés bornés. L'image d'un compact par une application continue est compacte : une fonction continue sur un compact à valeurs réelles est bornée et atteint ses bornes. Elle y est aussi uniformément continue (théorème de Heine).

E Exemple 3 : un non-compact

Pour $n \geq 2$, posons $U_n =]\frac{1}{n}, 2[$. Ces ouverts recouvrent $]0, 1]$. Une sous-famille finie a pour réunion $] \frac{1}{N}, 2[$, où N est le plus grand indice retenu ; elle ne contient pas $\frac{1}{N+1} \in]0, 1]$. Donc $]0, 1]$ n'est pas compact, ce qu'on savait : il n'est pas fermé.

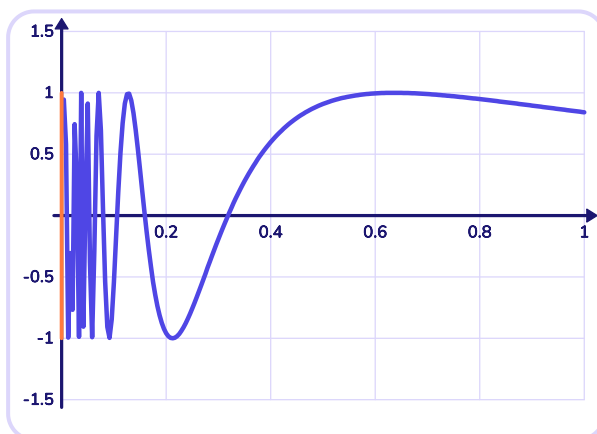
7. Connexité

D Connexe

Une partie A est **connexe** si elle ne peut pas s'écrire comme réunion de deux parties disjointes non vides, ouvertes dans A . Elle est **connexe par arcs** si deux points quelconques sont reliés par une application continue $\gamma : [0, 1] \rightarrow A$.

P Propriétés

Les connexes de $\mathbb{R}$ sont exactement les intervalles. L'image d'un connexe par une application continue est connexe : c'est le théorème des valeurs intermédiaires. Tout connexe par arcs est connexe ; la réciproque est fausse.



Le graphe de $\sin(1/x)$ pour $x \in]0, 1]$, complété par le segment $\{0\} \times [-1, 1]$, est connexe mais non connexe par arcs : c'est l'exemple classique.



Astuce

Zyro, l'explorateur extraterrestre, te souffle : pour montrer que deux espaces ne sont pas homéomorphes, retire un point à chacun et regarde si le reste est encore connexe.

8. Complétude



Suite de Cauchy, espace complet

Une suite (x_n) est de **Cauchy** si $\forall \varepsilon > 0 \exists N : m, n \geq N \Rightarrow d(x_m, x_n) < \varepsilon$.

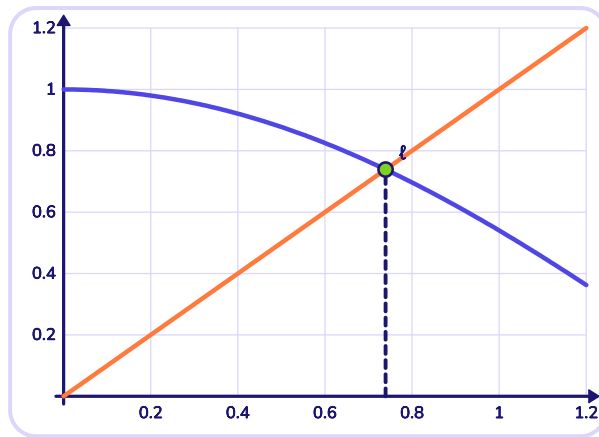
L'espace est **complet** si toute suite de Cauchy converge.

Toute suite convergente est de Cauchy ; une suite de Cauchy est bornée, et converge dès qu'elle admet une valeur d'adhérence. $\mathbb{R}^n$ est complet ; une partie fermée d'un espace complet est complète ; $\mathbb{Q}$ et $]0, 1]$ ne le sont pas.



Théorème du point fixe de Banach

Soit (E, d) complet non vide et $f : E \rightarrow E$ contractante : $d(f(x), f(y)) \leq k d(x, y)$ avec $0 \leq k < 1$. Alors f a un unique point fixe ℓ . Pour tout x_0 , la suite $x_{n+1} = f(x_n)$ converge vers ℓ , avec $d(x_n, \ell) \leq \frac{k^n}{1-k} d(x_1, x_0)$.



E Exemple 4 : point fixe du cosinus

La fonction $f = \cos$ envoie $[0, 1]$ dans $[\cos 1, 1] \subset [0, 1]$, et $|f'| = |\sin| \leq \sin 1 \approx 0,8415 < 1$ sur cet intervalle. Comme $[0, 1]$ est fermé dans $\mathbb{R}$, il est complet : $\cos x = x$ a une unique solution $\ell \approx 0,7391$, limite de $x_{n+1} = \cos x_n$.

M Méthode : utiliser le point fixe

1. Trouver un espace complet E (souvent un fermé de $\mathbb{R}^n$).
2. Vérifier que $f(E) \subset E$.
3. Majorer $d(f(x), f(y))$ par $k d(x, y)$ avec $k < 1$.
4. Conclure à l'existence, l'unicité et la convergence de l'itération.

À retenir

- Une distance se définit par séparation, symétrie et inégalité triangulaire ; une norme en fournit une.
- Les ouverts sont stables par réunion quelconque et intersection finie ; les fermés par l'inverse.
- $x \in \overline{A}$ si et seulement si x est limite d'une suite de A .
- Continuité : préimage d'ouvert ouverte, ou caractérisation par suites.
- Compact : fermé borné en dimension finie ; une fonction continue y atteint ses bornes.
- Connexes de $\mathbb{R}$: les intervalles ; l'image continue d'un connexe est connexe.
- Dans un complet, une contraction admet un unique point fixe.

Le livre de cours de maths Licence L3

Tout le programme en un seul PDF de 101 pages, à imprimer ou à garder sur ta tablette.

Voir le livre

Zyro te conseille la suite

 Exercices de maths

Topologie des espaces métriques :
exercices de maths Licence L3

 Contrôles de maths

Topologie des espaces métriques :
contrôle de maths Licence L3

 QCM de maths

Topologie des espaces métriques : QCM
de maths Licence L3

 Exercices de maths

Espaces complets et point fixe : exercices
de maths Licence L3

 Exercices de maths

Mesure et intégrale de Lebesgue :
exercices de maths Licence L3

 Contrôles de maths

Espaces complets et point fixe : contrôle
de maths Licence L3

Zyro vous emmène sur nos sites partenaires

Embarquez pour d'autres planètes du savoir et leurs applis.

Décollage