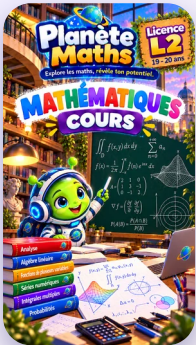


Topologie des espaces métriques et normés : cours de maths Licence L2 à télécharger en PDF



Le livre de cours de maths Licence L2

Tout le programme en un seul PDF de 100 pages, à imprimer ou à garder sur ta tablette.

[Voir le livre](#)

Limites, continuité, convergence de suites de fonctions : toute l'analyse repose sur une seule idée, mesurer la proximité entre deux objets. Ce chapitre fixe le langage commun des distances et des normes, puis en déduit la topologie : ouverts, fermés, adhérence, compacité, complétude et connexité. Les résultats obtenus dans $\mathbb{R}^n$ servent de guide, et les contre-exemples en dimension infinie montrent exactement où la dimension finie intervient.

1. Distances et normes

D Distance et norme

Une **distance** sur un ensemble E est une application $d : E \times E \rightarrow \mathbb{R}_+$ telle que, pour tous $x, y, z \in E$: $d(x, y) = 0 \iff x = y$ (séparation), $d(x, y) = d(y, x)$ (symétrie), $d(x, z) \leq d(x, y) + d(y, z)$ (inégalité triangulaire).

Une **norme** sur un espace vectoriel réel E est une application $\| \cdot \| : E \rightarrow \mathbb{R}_+$ vérifiant $\|x\| = 0 \iff x = 0$, $\|\lambda x\| = |\lambda| \|x\|$ et $\|x + y\| \leq \|x\| + \|y\|$. Elle définit la distance $d(x, y) = \|x - y\|$.

Sur $\mathbb{R}^n$, les trois normes usuelles sont $\|x\|_1 = \sum_i |x_i|$, $\|x\|_2 = \sqrt{\sum_i x_i^2}$ et $\|x\|_\infty = \max_i |x_i|$. Sur l'espace $C([0, 1])$ des fonctions continues de $[0, 1]$ dans $\mathbb{R}$, on dispose de $\|f\|_\infty = \sup_{[0, 1]} |f|$ et de $\|f\|_1 = \int_0^1 |f(t)| dt$.

P Inégalité triangulaire inverse

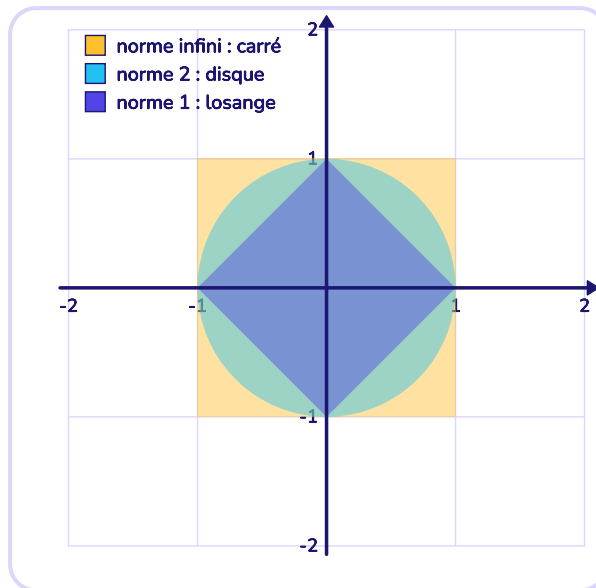
Dans un espace normé, $|\|x\| - \|y\|| \leq \|x - y\|$. En particulier, l'application $x \mapsto \|x\|$ est 1-lipschitzienne.

E Exemple 1 : trois normes du même vecteur

Pour $x = (3, -4, 12) \in \mathbb{R}^3$: $\|x\|_1 = 3 + 4 + 12 = 19$,
 $\|x\|_2 = \sqrt{9 + 16 + 144} = 13$, $\|x\|_\infty = 12$. On observe $\|x\|_\infty \leq \|x\|_2 \leq \|x\|_1$, ce qui est général.

Toutes les distances ne proviennent pas d'une norme : la *distance discrète* ($d(x, y) = 1$ si $x \neq y$, 0 sinon) est valable sur n'importe quel ensemble. Les figures ci-dessous montrent la forme des

boules unité : un losange, un disque et un carré.



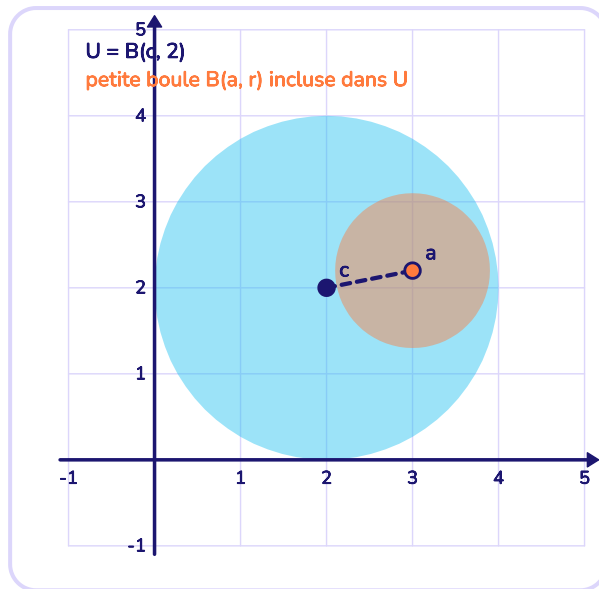
2. Boules, ouverts et fermés

D Boules, ouverts, fermés

La **boule ouverte** de centre a et de rayon $r > 0$ est $B(a,r) = \{x : d(a,x) < r\}$. La **boule fermée** est $B_f(a,r) = \{x : d(a,x) \leq r\}$. Une partie U est **ouverte** si, pour tout $a \in U$, il existe $r > 0$ tel que $B(a,r) \subset U$. Une partie est **fermée** si son complémentaire est ouvert.

P Stabilité

Toute réunion d'ouverts est ouverte ; toute intersection *finie* d'ouverts est ouverte ; $\emptyset$ et E sont ouverts. Dualement : toute intersection de fermés est fermée, toute réunion *finie* de fermés est fermée. Les boules ouvertes sont ouvertes, les boules fermées sont fermées.



Attention

« Non ouvert » ne signifie pas « fermé ». L'intervalle $[0, 1[$ n'est ni ouvert ni fermé dans $\mathbb{R}$. De plus, une intersection infinie d'ouverts n'est pas ouverte en général :

$$\bigcap_{n \geq 1}]-\frac{1}{n}, \frac{1}{n}[= \{0\}.$$



Méthode : montrer qu'une partie est ouverte ou fermée

1. Écrire la partie comme image réciproque d'un ouvert (ou d'un fermé) par une application continue, puis combiner réunions et intersections.
2. Sinon, revenir à la définition : fixer un point, exhiber un rayon $r > 0$.
3. Pour réfuter « fermé », chercher une suite de la partie dont la limite sort de la partie.

E Exemple 2 : un demi-plan ouvert

Soit $A = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 : x + y < 5\}$ avec la norme $\|\cdot\|_2$. Pour $a = (a_1, a_2) \in A$, posons $r = \frac{5 - a_1 - a_2}{\sqrt{2}} > 0$. Si $\|x - a\|_2 < r$

I 3. Intérieur, adhérence, densité

D Intérieur, adhérence, frontière

Pour $A \subset E$: l'intérieur $\overset{\circ}{A}$ est l'ensemble des points a tels qu'une boule $B(a, r)$ soit contenue dans A ; l'adhérence $\overline{A}$ est l'ensemble des points a tels que toute boule $B(a, r)$ rencontre A ; la frontière est $\overline{A} \setminus \overset{\circ}{A}$. La partie A est **dense** si $\overline{A} = E$.

L'intérieur est le plus grand ouvert contenu dans A , l'adhérence est le plus petit fermé contenant A . En particulier, A est fermée si et seulement si $A = \overline{A}$.

E Exemple 3 : un ensemble mêlant points isolés et intervalle

Dans $\mathbb{R}$, soit $A = [0, 1[\cup \{2\}$. Alors $\overset{\circ}{A} =]0, 1[$, $\overline{A} = [0, 1] \cup \{2\}$ et la frontière est $\{0, 1, 2\}$. Par ailleurs $\mathbb{Q}$ est dense dans $\mathbb{R}$: tout intervalle ouvert non vide contient un rationnel.



Attention

Dans un espace *normé*, l'adhérence de $B(a, r)$ est $B_f(a, r)$. Dans un espace métrique quelconque c'est faux : pour la distance discrète, $B(a, 1) = \{a\}$ est fermée alors que $B_f(a, 1) = E$.

4. Suites et limites



Convergence

Une suite (u_n) d'éléments de E **converge** vers ℓ si $d(u_n, \ell) \rightarrow 0$, c'est-à-dire : pour tout $\varepsilon > 0$ il existe N tel que $n \geq N \Rightarrow d(u_n, \ell) < \varepsilon$. La limite, si elle existe, est unique.



Caractérisation séquentielle

Un point a est adhérent à A si et seulement s'il est limite d'une suite d'éléments de A .
Une partie A est fermée si et seulement si la limite de toute suite convergente d'éléments de A appartient à A .

Dans $\mathbb{R}^n$, une suite converge si et seulement si chacune de ses coordonnées converge, quelle que soit la norme choisie parmi les trois ci-dessus (c'est une conséquence du paragraphe 7).

E**Exemple 4 : une suite de fonctions qui converge pour une norme et pas pour l'autre**

Dans $C([0, 1])$, soit $f_n(t) = t^n$. On a $\|f_n\|_1 = \frac{1}{n+1} \rightarrow 0$: (f_n) converge vers la fonction nulle pour $\|\cdot\|_1$. Mais $\|f_n\|_\infty = 1$ pour tout n : elle ne converge pas vers 0 pour $\|\cdot\|_\infty$.

5. Continuité et applications linéaires continues**D****Continuité**

Une application $f : (E, d) \rightarrow (F, d')$ est continue en a si pour tout $\varepsilon > 0$ il existe $\delta > 0$ tel que $d(x, a) < \delta \Rightarrow d'(f(x), f(a)) < \varepsilon$. De façon équivalente, $u_n \rightarrow a \Rightarrow f(u_n) \rightarrow f(a)$. Elle est continue sur E si et seulement si l'image réciproque de tout ouvert (resp. fermé) est un ouvert (resp. fermé).

P**Applications linéaires**

Soit $u : E \rightarrow F$ linéaire entre deux espaces normés. Il y a équivalence entre : u continue ; u continue en 0 ; u bornée sur la boule unité ; il existe $C \geq 0$ tel que $\|u(x)\| \leq C\|x\|$ pour tout x . La plus petite constante C est la **norme d'opérateur** $\|u\| = \sup_{\|x\| \leq 1} \|u(x)\|$.

E Exemple 5 : calculer une norme d'opérateur

Soit $u : (\mathbb{R}^2, \|\cdot\|_\infty) \rightarrow \mathbb{R}, u(x, y) = 3x - 4y$. Alors

$|u(x, y)| \leq 3|x| + 4|y| \leq 7\|(x, y)\|_\infty$, avec égalité pour $(1, -1) : u(1, -1) = 7$.

Donc $\|u\| = 7$. Pour la norme $\|\cdot\|_2$, Cauchy-Schwarz donne $|u(x, y)| \leq 5\|(x, y)\|_2$ avec égalité pour $(3, -4) : on obtient \|u\| = 5$.



Attention

En dimension infinie, une application linéaire n'est pas toujours continue. La dérivation

$D : (C^1([0, 1]), \|\cdot\|_\infty) \rightarrow (C([0, 1]), \|\cdot\|_\infty)$ vérifie $\|D(t^n)\|_\infty = n$ alors que $\|t^n\|_\infty = 1$: elle n'est pas bornée sur la boule unité.

6. Compacité



Partie compacte

Une partie K d'un espace métrique est **compacte** si toute suite d'éléments de K possède une sous-suite qui converge vers un élément de K .



Propriétés fondamentales

Toute partie compacte est fermée et bornée. En dimension finie, la réciproque est vraie : les compacts de $\mathbb{R}^n$ sont exactement les parties fermées bornées. L'image d'un compact par une application continue est compacte ; en particulier une fonction continue $f : K \rightarrow \mathbb{R}$ est bornée et atteint ses bornes.

E**Exemple 6 : des extrema par compacité**

Soit $f(x, y) = x + 2y$ sur le disque fermé unité K de $(\mathbb{R}^2, \|\cdot\|_2)$, compact car fermé borné. Par Cauchy-Schwarz, $|f(x, y)| \leq \sqrt{5} \|(x, y)\|_2 \leq \sqrt{5}$. Le point $\left(\frac{1}{\sqrt{5}}, \frac{2}{\sqrt{5}}\right)$ donne $f = \sqrt{5}$: le maximum vaut $\sqrt{5}$ et le minimum $-\sqrt{5}$.

**Attention**

En dimension infinie, fermé et borné ne suffit plus. Dans $(C([0, 1]), \|\cdot\|_\infty)$, la suite $f_n(t) = t^n$ reste dans la boule unité fermée. Pour n fixé et m grand, on a $\|f_n - f_m\|_\infty \geq 2^{-n/m} - \frac{1}{2}$, qui tend vers $\frac{1}{2}$ quand $m \rightarrow \infty$; aucune sous-suite n'est donc de Cauchy, et aucune ne converge. Le théorème de Riesz affirme que la boule unité fermée est compacte si et seulement si l'espace est de dimension finie.

7. Équivalence des normes en dimension finie

D**Normes équivalentes**

Deux normes N_1 et N_2 sur E sont **équivalentes** s'il existe $a, b > 0$ tels que $a N_1 \leq N_2 \leq b N_1$. Elles définissent alors les mêmes ouverts, les mêmes fermés, les mêmes suites convergentes, les mêmes compacts et les mêmes applications continues.

P**Théorème**

Sur un espace vectoriel de dimension finie, toutes les normes sont équivalentes.

Idée de la preuve. Dans une base, on compare une norme N quelconque à $\|\cdot\|_\infty$: l'inégalité $N(x) \leq b\|x\|_\infty$ vient de l'inégalité triangulaire. Il reste à minorer N : la sphère unité de $\|\cdot\|_\infty$ est fermée et bornée, donc compacte ; N y est continue, strictement positive, et atteint donc un minimum $a > 0$. Par homogénéité, $N(x) \geq a\|x\|_\infty$ partout.

Sur $\mathbb{R}^n$, on a explicitement :

Inégalité	Valeur optimale de la constante
$\ x\ _\infty \leq \ x\ _2 \leq \ x\ _1$	constante 1, égalité pour $(1, 0, \dots, 0)$
$\ x\ _1 \leq n \ x\ _\infty$	constante n, égalité pour $(1, 1, \dots, 1)$
$\ x\ _1 \leq \sqrt{n} \ x\ _2$	constante $\sqrt{n}$, égalité pour $(1, 1, \dots, 1)$
$\ x\ _2 \leq \sqrt{n} \ x\ _\infty$	constante $\sqrt{n}$, égalité pour $(1, 1, \dots, 1)$

Conséquences : toute application linéaire définie sur un espace de dimension finie est continue ; tout sous-espace de dimension finie d'un espace normé est fermé ; tout espace normé de dimension finie est complet (paragraphe suivant).

E Exemple 7 : des constantes d'équivalence dans $\mathbb{R}^3$

Pour $x = (2, -2, 1)$: $\|x\|_1 = 5$, $\|x\|_2 = 3$, $\|x\|_\infty = 2$. On vérifie

$2 \leq 3 \leq 5 \leq 3 \times 2 = 6$ et $5 \leq \sqrt{3} \times 3 \approx 5,196$. Aucune des inégalités n'est une égalité ici : les constantes ne sont atteintes que pour des vecteurs très particuliers.



Astuce de Zyro

Sur la planète Zyro, on ne mesure jamais deux fois la même chose avec la même règle ! En dimension finie, changer de règle (de norme) change les nombres, mais jamais les notions de proche ou de limite. En dimension infinie, attention : le choix de la règle compte vraiment.

8. Complétude



Suite de Cauchy, espace complet

Une suite (u_n) est de **Cauchy** si pour tout $\varepsilon > 0$ il existe N tel que $m, n \geq N \Rightarrow d(u_m, u_n) < \varepsilon$. Un espace métrique est **complet** si toute suite de Cauchy y converge. Un espace normé complet est appelé **espace de Banach**.



Faits essentiels

Toute suite convergente est de Cauchy ; toute suite de Cauchy est bornée ; une suite de Cauchy qui possède une sous-suite convergente converge. $\mathbb{R}^n$ est complet pour n'importe quelle norme ; une partie fermée d'un espace complet est complète ; $(C([0, 1]), \|\cdot\|_\infty)$ est complet, tandis que $(C([0, 1]), \|\cdot\|_1)$ ne l'est pas.

L'ensemble $\mathbb{Q}$ n'est pas complet : la suite définie par $u_0 = 1$ et $u_{n+1} = \frac{1}{2} \left(u_n + \frac{2}{u_n} \right)$ est une suite de rationnels de Cauchy (ses premiers termes sont $1, \frac{3}{2}, \frac{17}{12}, \frac{577}{408}$), mais sa limite $\sqrt{2}$ n'est pas rationnelle.



P

Théorème du point fixe de Banach

Soit F une partie fermée non vide d'un espace complet et $f : F \rightarrow F$ une application k -lipschitzienne avec $k < 1$ (une *contraction*). Alors f possède un unique point fixe ℓ , et pour tout $u_0 \in F$ la suite $u_{n+1} = f(u_n)$ converge vers ℓ avec

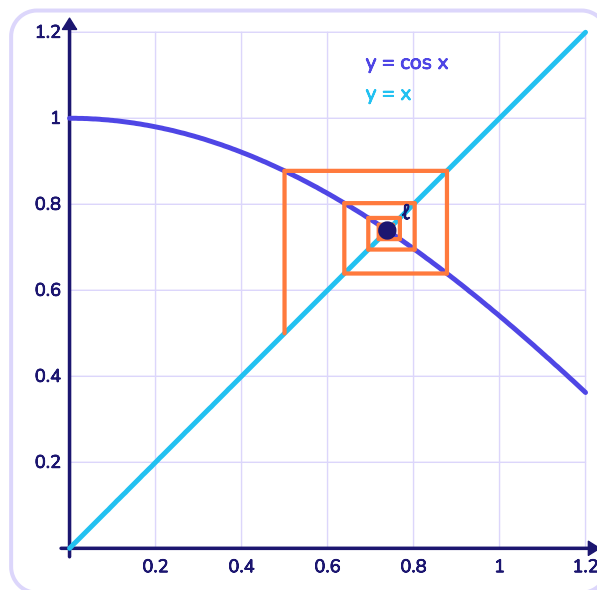
$$\|u_n - \ell\| \leq \frac{k^n}{1 - k} \|u_1 - u_0\|.$$

La preuve consiste à montrer que $\|u_{n+1} - u_n\| \leq k^n \|u_1 - u_0\|$, donc que la suite est de Cauchy, puis à passer à la limite dans $u_{n+1} = f(u_n)$.

E

Exemple 8 : résoudre $\cos x = x$

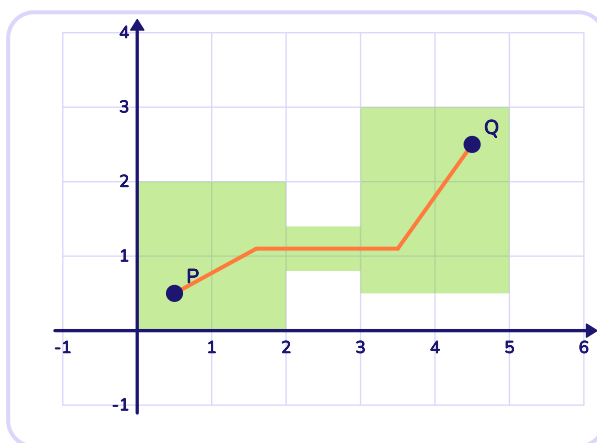
L'intervalle $F = [0, 1]$ est fermé dans $\mathbb{R}$, donc complet. On a $\cos([0, 1]) = [\cos 1, 1] \subset [0, 1]$ et $|\cos'| = |\sin| \leq \sin 1 \approx 0,841 < 1$ sur F . Le théorème du point fixe donne une unique solution $\ell \approx 0,7391$, limite de $u_{n+1} = \cos u_n$ quel que soit $u_0 \in [0, 1]$.



9. Connexité par arcs

D Connexité par arcs

Un **chemin** dans A est une application continue $\gamma : [0, 1] \rightarrow A$. La partie A est **connexe par arcs** si deux points quelconques $P, Q \in A$ peuvent être reliés par un chemin, c'est-à-dire s'il existe γ continue avec $\gamma(0) = P$ et $\gamma(1) = Q$.



P Propriétés

Toute partie convexe est connexe par arcs (le segment $[P, Q]$ est un chemin). L'image d'une partie connexe par arcs par une application continue est connexe par arcs. Les parties connexes par arcs de $\mathbb{R}$ sont exactement les intervalles : c'est le théorème des valeurs intermédiaires. Ainsi, si A est connexe par arcs et $f : A \rightarrow \mathbb{R}$ est continue, alors $f(A)$ est un intervalle.

E**Exemple 9 : le plan privé de l'origine**

L'ensemble $\mathbb{R} \setminus \{0\}$ n'est pas connexe par arcs : un chemin continu de -1 à 1 prendrait la valeur 0 . En revanche $\mathbb{R}^2 \setminus \{0\}$ l'est : si le segment $[P, Q]$ évite 0 , on le prend ; sinon P et Q sont alignés avec 0 , et on passe par un point C hors de cette droite en suivant $[P, C]$ puis $[C, Q]$.

À retenir

- Une norme définit une distance ; les boules ouvertes engendrent les ouverts. Une réunion quelconque et une intersection finie d'ouverts sont ouvertes.
- $a \in \overline{A}$ si et seulement si a est limite d'une suite de A ; A est fermée si et seulement si $A = \overline{A}$.
- Une application est continue si et seulement si l'image réciproque de tout ouvert est un ouvert ; une application linéaire est continue si et seulement si $\|u(x)\| \leq C\|x\|$.
- Un compact est fermé borné ; en dimension finie la réciproque est vraie. Une fonction continue sur un compact atteint ses bornes.
- En dimension finie, toutes les normes sont équivalentes, toute application linéaire est continue et l'espace est complet.
- Dans un espace complet, une contraction admet un unique point fixe, limite de toute suite itérée.
- L'image continue d'une partie connexe par arcs est connexe par arcs ; dans $\mathbb{R}$, ce sont les intervalles.

Le livre de cours de maths Licence L2

Tout le programme en un seul PDF de 100 pages, à imprimer ou à garder sur ta tablette.

Voir le livre



Entraîne-toi : défi express de Licence L2

Changer de niveau

Niveau : Licence L2

6 questions au hasard, correction tout de suite.



Lancer le défi



Zyro te conseille la suite



Exercices de maths

Topologie des espaces métriques et normés : exercices de maths Licence L2



Contrôles de maths

Topologie des espaces métriques et normés : contrôle de maths Licence L2

 QCM de maths

Topologie des espaces métriques et normés : QCM de maths Licence L2

 Exercices de maths

Calcul différentiel à plusieurs variables : exercices de maths Licence L2

 Exercices de maths

Intégrales généralisées et à paramètre : exercices de maths Licence L2

 Contrôles de maths

Calcul différentiel à plusieurs variables : contrôle de maths Licence L2

Zyro vous emmène sur nos sites partenaires

Embarquez pour d'autres planètes du savoir et leurs applis.

Décollage