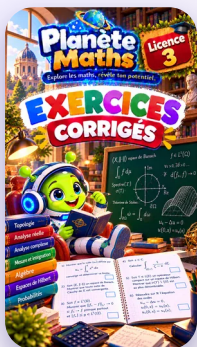


Topologie des espaces métriques : exercices corrigés de maths Licence L3 à télécharger en PDF



Le livre d'exercices corrigés de maths Licence L3

Tout le programme en un seul PDF de 126 pages, à imprimer ou à garder sur ta tablette.

[Voir le livre](#)

Corrigés rédigés des exercices du chapitre. Vérifie chaque étape, puis corrige-toi.

1 Distance discrète



- a. Séparation, symétrie et positivité sont immédiates. Pour l'inégalité triangulaire : si $x = z$, $d(x, z) = 0 \leq d(x, y) + d(y, z)$. Si $x \neq z$, on ne peut avoir à la fois $x = y$ et $y = z$, donc $d(x, y) + d(y, z) \geq 1 = d(x, z)$.
- b. $B(a, \frac{1}{2}) = \{a\}$ car $d(a, x) < \frac{1}{2}$ force $d(a, x) = 0$. $B(a, 2) = E$ car toutes les distances valent au plus 1.
- c. Un singleton $\{a\}$ est une boule ouverte, donc un ouvert. Toute partie est une réunion de singletons, donc ouverte ; son complémentaire l'est aussi : toute partie est à la fois ouverte et fermée.

2 Calculer trois normes



$$\|x\|_1 = 3 + 4 + 12 = 19. \|x\|_2 = \sqrt{9 + 16 + 144} = \sqrt{169} = 13. \|x\|_\infty = 12.$$

On a bien $12 \leq 13 \leq 19 \leq 36 = 3 \times 12$.

3 Ni ouvert ni fermé



Non ouvert : toute boule $]1 - r, 1 + r[$ autour de 1 contient $1 + \frac{r}{2} \notin]0, 1]$. Non fermé : la suite $\frac{1}{n}$ est dans $]0, 1]$, converge vers $0 \notin]0, 1]$; le complémentaire $] - \infty, 0] \cup]1, +\infty[$ n'est donc pas ouvert (aucune boule autour de 0 n'y reste).

4 Intérieur, adhérence, frontière



Intérieur : $\overset{\circ}{A} =] - 2, 1[\cup]1, 4[$ (le point 1 n'est pas dans A , le point 4 n'est pas intérieur, 6 est isolé). Adhérence : $\overline{A} = [-2, 4] \cup \{6\}$ (le point 1 est limite de points de A). Frontière : $\overline{A} \setminus \overset{\circ}{A} = \{-2, 1, 4, 6\}$.

5 Une suite du plan



$$\|u_n - (0, 1)\|_\infty = \max\left(\frac{1}{n}, \frac{1}{n^2}\right) = \frac{1}{n} \rightarrow 0, \text{ donc } u_n \rightarrow (0, 1).$$

$$\frac{1}{n} < 10^{-2} \iff n > 100 : \text{ le plus petit entier est } N = 101.$$

6 Image réciproque de la valeur absolue



On a $||x| - |y|| \leq |x - y|$: l'application est 1-lipschitzienne, donc continue. Alors $\{|x| > 1\}$ est la préimage de l'ouvert $]1, +\infty[$, donc ouvert (c'est $] - \infty, -1[\cup]1, +\infty[$). Son complémentaire $[-1, 1]$, préimage du fermé $[0, 1]$, est fermé.

7 Compact ou non ?



$[-2, 5]$: fermé borné, compact. $]0, 1]$: non fermé, pas compact. $\mathbb{Z}$: fermé mais non borné, pas compact. $[0, 1] \cup \{7\}$: fermé (réunion finie de fermés) et borné, compact. $\mathbb{Q} \cap [0, 1]$: borné mais non fermé ($\frac{\sqrt{2}}{2}$ en est limite), pas compact.

8 Une distance bornée sur $\mathbb{R}$



a. Sur $[0, +\infty[$, $\varphi'(x) = \frac{1}{(1+x)^2} > 0$; sur $] -\infty, 0]$, $\varphi(x) = \frac{x}{1-x}$ de dérivée $\frac{1}{(1-x)^2} > 0$. Donc φ est strictement croissante, donc injective. Ainsi

$d(x, y) = 0 \iff \varphi(x) = \varphi(y) \iff x = y$; symétrie et inégalité triangulaire viennent de la valeur absolue.

b. $d(1, 3) = \left| \frac{1}{2} - \frac{3}{4} \right| = \frac{1}{4}$. $d(0, n) = \frac{n}{n+1}$.

c. $|\varphi(x)| < 1$ pour tout x , donc $d(0, x) < 1 : \mathbb{R} = B(0, 1)$. L'espace est borné pour d bien que non borné pour la distance usuelle, ce qui montre que « borné » dépend de la distance.

9 Aires des boules unité



Norme 1 : losange de sommets $(\pm 1, 0), (0, \pm 1)$, de diagonales 2 et 2 : aire $\frac{2 \times 2}{2} = 2$.

Norme 2 : disque d'aire π . Norme ∞ : carré $[-1, 1]^2$ d'aire 4.

$2 < \pi < 4$ et, comme $\|x\|_\infty \leq \|x\|_2 \leq \|x\|_1$, on a $\|x\|_1 \leq 1 \Rightarrow \|x\|_2 \leq 1 \Rightarrow \|x\|_\infty \leq 1$: losange $\subset$ disque $\subset$ carré.

10 Un ouvert du plan



Les applications $f(x, y) = x$ et $g(x, y) = x^2 - y$ sont continues sur $\mathbb{R}^2$. Alors

$U = f^{-1}(]0, +\infty[) \cap g^{-1}(]0, +\infty[)$ est l'intersection de deux ouverts, donc un ouvert.

Pour $(1, 0)$: $x = 1 > 0$ et $1 - 0 = 1 > 0$, il est dans U . Pour $(1, 1)$: $x^2 - y = 0$, pas strictement positif, il n'est pas dans U (il est sur la frontière).

11 Un fermé non compact et non connexe



Fermé : $F = h^{-1}([1, +\infty[)$ avec $h(x, y) = xy$ continue. Non compact : les points $(n, 1)$ sont dans F (car $n \geq 1$) et $\|(n, 1)\|_\infty = n$, donc F n'est pas borné. Non connexe : $F \subset \{x \neq 0\}$; les parties $F \cap \{x > 0\}$ et $F \cap \{x < 0\}$ sont ouvertes dans F , disjointes, non vides (elles contiennent $(1, 1)$ et $(-1, -1)$) et recouvrent F .

12 Valeurs d'adhérence



Les termes pairs vérifient $u_{2k} = 1 + \frac{1}{2k} \rightarrow 1$, les termes impairs $u_{2k+1} = -1 + \frac{1}{2k+1} \rightarrow -1$. Ces deux limites sont des valeurs d'adhérence, et il n'y en a pas d'autres, car tout terme est proche de 1 ou de -1 à partir d'un certain rang. Une suite convergente a pour seule valeur d'adhérence sa limite : (u_n) diverge, bien qu'elle soit bornée ($|u_n| \leq 2$) et qu'elle ait des sous-suites convergentes, comme le prévoit Bolzano-Weierstrass.

13 L'intervalle $]0, 1]$ n'est pas complet



Pour $m \geq n \geq N$, $|\frac{1}{n} - \frac{1}{m}| \leq \frac{1}{n} \leq \frac{1}{N}$, qui tend vers 0 : la suite est de Cauchy. Sa seule limite possible dans $\mathbb{R}$ est $0 \notin]0, 1]$: elle ne converge pas dans $]0, 1]$. Cet espace n'est pas complet, bien que $\mathbb{R}$ le soit : une partie non fermée d'un complet n'est pas complète.

14 Itérations d'une contraction



- $|f(x) - f(y)| = \frac{1}{3}|x - y|$: contraction de rapport $k = \frac{1}{3}$ sur $\mathbb{R}$ complet.
 $f(\ell) = \ell \iff \ell = 1 + \frac{\ell}{3} \iff \ell = \frac{3}{2}$.
- $u_1 = 1, u_2 = \frac{4}{3}, u_3 = \frac{13}{9}, u_4 = \frac{40}{27}, u_5 = \frac{121}{81} \approx 1,494$.
- $u_n - \ell = \frac{1}{3}(u_{n-1} - \ell)$ donne $|u_n - \frac{3}{2}| = \frac{1}{3} \cdot 3^{-n}$. On veut $\frac{1}{3} \cdot 3^{-n} < 10^{-3}$, soit $3^n > 1500$: comme $3^6 = 729$ et $3^7 = 2187$, il faut $n = 7$.

15 Valeurs intermédiaires et trois racines



p est continue et l'image d'un intervalle est un intervalle. $p(-2) = -1 < 0$ et $p(-1) = 3 > 0$: une racine dans $[-2, -1]$. $p(0) = 1 > 0$ et $p(1) = -1 < 0$: une racine dans $[0, 1]$. $p(1) = -1 < 0$ et $p(2) = 3 > 0$: une racine dans $[1, 2]$. Ces trois intervalles ont au plus un point commun (1, qui n'est pas racine), donc ce sont trois racines distinctes ; un polynôme de degré 3 n'en a pas plus : exactement trois.

16 Réunion, intersection et adhérence



- Comme $A \subset A \cup B$, $\overline{A} \subset \overline{A \cup B}$; de même pour B , d'où $\supset$. Réciproquement $\overline{A \cup B}$ est un fermé (réunion finie) contenant $A \cup B$, donc il contient le plus petit fermé $\overline{A \cup B}$.
- $A \cap B \subset A$ donne $\overline{A \cap B} \subset \overline{A}$, idem pour B . Pour $A = \mathbb{Q}$ et $B = \mathbb{R} \setminus \mathbb{Q}$, les deux sont denses : $\overline{A \cap B} = \mathbb{R}$, mais $A \cap B = \emptyset$, d'adhérence vide : inclusion stricte.

17 Normes non équivalentes



- $\|f_n\|_\infty = 1$ (atteint en $x = 1$) et $\|f_n\|_1 = \int_0^1 x^n dx = \frac{1}{n+1}$.
- Si $1 \leq c \cdot \frac{1}{n+1}$ pour tout n , alors $n+1 \leq c$ pour tout n , absurde. Les deux normes ne sont pas équivalentes, contrairement au cas de la dimension finie, et la topologie de la norme $\|\cdot\|_1$ est strictement moins fine que celle de $\|\cdot\|_\infty$.
- $\frac{1}{n+1} \leq 0,01 \iff n \geq 99$.

18 Maximum sur un disque

★★★★

- a. D est fermé borné de $\mathbb{R}^2$, donc compact ; f est continue, donc atteint son maximum et son minimum sur D .
- b. Par Cauchy-Schwarz, $x + 2y \leq \sqrt{1+4}\sqrt{x^2+y^2} \leq \sqrt{5}$. Pour $(x, y) = \left(\frac{1}{\sqrt{5}}, \frac{2}{\sqrt{5}}\right) \in D$, $f = \frac{1+4}{\sqrt{5}} = \sqrt{5}$. Le maximum vaut $\sqrt{5} \approx 2,236$, atteint en ce seul point ; le minimum est $-\sqrt{5}$.

19 Distance à une partie

★★★★

- a. $d(4, A) = \min(|4-3|, |4-5|) = 1$ (la borne inférieure des distances à $]1, 3[$ vaut 1, sans être atteinte). $d(3, A) = 0 : 3 \notin A$ mais 3 est limite de $3 - \frac{1}{n} \in A$.
 $d(3,5; A) = \min(0,5; 1,5) = 0,5$.
- b. Pour $a \in A$, $|x-a| \leq |x-y| + |y-a|$, donc $d(x, A) \leq |x-y| + d(y, A)$ en prenant la borne inférieure ; on échange x et y . Enfin $d(x, A) = 0$ signifie qu'il existe $a_n \in A$ avec $|x-a_n| \rightarrow 0$, c'est-à-dire $x \in \overline{A}$.

20 Point fixe du cosinus

★★★★

- a. $\cos$ envoie $[0, 1]$ dans $[\cos 1, 1] \subset [0, 1]$, et par accroissements finis $|\cos x - \cos y| \leq \sin 1 \cdot |x - y|$ avec $\sin 1 < 1$. $[0, 1]$ est complet (fermé de $\mathbb{R}$). Le théorème de Banach donne un unique point fixe $\ell \approx 0,7391$ et la convergence de (x_n) .
- b. On cherche $\frac{k^n}{1-k} \cdot 0,4597 \leq 10^{-2}$. Avec $\frac{0,4597}{1-k} \approx 2,90$, il faut $k^n \leq 0,0034$, c'est-à-dire $n \geq 33$ (la majoration est pessimiste : l'erreur réelle est bien plus petite).

21 $\mathbb{R}$ et $\mathbb{R}^2$ ne sont pas homéomorphes



Soient P, Q deux points distincts de $\mathbb{R}^2 \setminus \{O\}$. Si le segment $[P, Q]$ évite O , il fournit un chemin. Sinon O est sur $[P, Q]$ et on passe par un point R hors de la droite (PQ) : $[P, R]$ et $[R, Q]$ évitent O , d'où un chemin continu. L'espace est connexe par arcs, donc connexe.

$\mathbb{R} \setminus \{0\} =]-\infty, 0[\cup]0, +\infty[$ est une réunion de deux ouverts disjoints non vides : non connexe.

Si $h : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}^2$ était un homéomorphisme, sa restriction établirait un homéomorphisme entre $\mathbb{R} \setminus \{0\}$ et $\mathbb{R}^2 \setminus \{h(0)\}$, qui conserverait la connexité. Contradiction : $\mathbb{R}$ et $\mathbb{R}^2$ ne sont pas homéomorphes.

Le livre d'exercices corrigés de maths Licence L3

Tout le programme en un seul PDF de 126 pages, à imprimer ou à garder sur ta tablette.

[Voir le livre](#)

Zyro te conseille la suite

Exercices de maths

Topologie des espaces métriques :
exercices de maths Licence L3

QCM de maths

Topologie des espaces métriques : QCM
de maths Licence L3



Contrôles de maths

Topologie des espaces métriques :
contrôle de maths Licence L3



Exercices de maths

Espaces complets et point fixe : exercices
de maths Licence L3



Exercices de maths

Mesure et intégrale de Lebesgue :
exercices de maths Licence L3



QCM de maths

Espaces complets et point fixe : QCM de
maths Licence L3

Zyro vous emmène sur nos sites partenaires

Embarquez pour d'autres planètes du savoir et leurs applis.

Décollage