

Topologie des espaces métriques et normés : exercices corrigés de maths Licence L2 à télécharger en PDF

Le livre d'exercices corrigés de maths Licence L2

Tout le programme en un seul PDF de 128 pages, à imprimer ou à garder sur ta tablette.

Voir le livre

Corrigés rédigés des exercices du chapitre. Vérifie chaque étape, puis corrige-toi.

1 Calculer des normes dans $\mathbb{R}^3$



a. $\|x\|_1 = 2 + 3 + 6 = 11$; $\|x\|_2 = \sqrt{4 + 9 + 36} = \sqrt{49} = 7$;
 $\|x\|_\infty = \max(2, 3, 6) = 6$.

b. $x - y = (3, -4, 4)$, donc $\|x - y\|_1 = 3 + 4 + 4 = 11$,
 $\|x - y\|_2 = \sqrt{9 + 16 + 16} = \sqrt{41}$ et $\|x - y\|_\infty = 4$. On retrouve bien
 $4 \leq \sqrt{41} \leq 11$.

2 Norme ou pas norme ?



N_1 est une norme : $N_1(x, y) = 0$ force $x = y = 0$; $N_1(\lambda(x, y)) = |\lambda|N_1(x, y)$; l'inégalité triangulaire découle de celle de la valeur absolue sur chaque terme.

N_2 n'en est pas une : $N_2(1, 1) = 0$ alors que $(1, 1) \neq (0, 0)$ (la séparation échoue).

N_3 n'en est pas une : $N_3(2x, 2y) = 4N_3(x, y) \neq 2N_3(x, y)$ dès que $(x, y) \neq 0$ (l'homogénéité échoue).

3 Boules dans $\mathbb{R}$ et aires de boules



a. $B(3, 2) = \{x : |x - 3| < 2\} =]1, 5[$ et $B_f(-1, \frac{1}{2}) = [-\frac{3}{2}, -\frac{1}{2}]$.

b. La boule unité pour $\|\cdot\|_1$ est le losange de sommets $(\pm 1, 0)$ et $(0, \pm 1)$: ses diagonales valent **2** et **2**, l'aire est $\frac{2 \times 2}{2} = 2$. Pour $\|\cdot\|_\infty$, c'est le carré $[-1, 1]^2$ de côté **2**, d'aire **4**.

4 Ouvert, fermé, ni l'un ni l'autre



A est un intervalle ouvert : ouvert. B est un segment : fermé. $C =]0, 1]$ n'est pas ouvert (**1** n'a pas de voisinage inclus dans C) ni fermé (**0** est limite de $\frac{1}{n} \in C$ mais **0** $\notin C$) : ni l'un ni l'autre.

D : la suite $\frac{1}{n}$ tend vers **0** $\notin D$, donc D n'est pas fermé ; aucun point de D n'a de boule incluse dans D , donc D n'est pas ouvert : ni l'un ni l'autre. $E = \mathbb{N}$ est fermé (son complémentaire est une réunion d'intervalles ouverts) et n'est pas ouvert (une boule autour de **0** contient des réels non entiers).

5 Intérieur, adhérence, frontière



Pour A : $\mathring{A} =]0, 1[$ (le point 2 est isolé, aucune boule autour de lui n'est dans A) ;
 $\overline{A} = [0, 1] \cup \{2\}$; frontière = $\{0, 1, 2\}$.

Pour B : tout intervalle ouvert contient des irrationnels, donc $\mathring{B} = \emptyset$; tout point de $[0, 1]$ est limite de rationnels de $[0, 1]$, et $B \subset [0, 1]$ fermé, donc $\overline{B} = [0, 1]$; frontière = $[0, 1]$.

6 Limites de suites dans le plan



On passe composante par composante. $\frac{3n+1}{n+2} \rightarrow 3$ et $\frac{(-1)^n}{n} \rightarrow 0$: $u_n \rightarrow (3, 0)$. Pour v_n , $n \sin \frac{1}{n} = \frac{\sin(1/n)}{1/n} \rightarrow 1$ et $e^{-n} \rightarrow 0$: $v_n \rightarrow (1, 0)$.

Enfin $\frac{3n+1}{n+2} - 3 = \frac{-5}{n+2}$, donc $\|u_n - (3, 0)\|_\infty = \max\left(\frac{5}{n+2}, \frac{1}{n}\right) = \frac{5}{n+2}$ pour $n \geq 1$, qui tend bien vers 0.

7 Continuité de la norme



Par l'inégalité triangulaire, $\|x\| \leq \|x - y\| + \|y\|$ et $\|y\| \leq \|x - y\| + \|x\|$, d'où $|\|x\| - \|y\|| \leq \|x - y\|$: la norme est 1-lipschitzienne, donc continue (prendre $\delta = \varepsilon$).

Ici $\|x\|_2 = 5$, $\|y\|_2 = \sqrt{9,61 + 15,21} = \sqrt{24,82} \approx 4,982$, donc $|\|x\| - \|y\|| \approx 0,018$, alors que $\|x - y\|_2 = \sqrt{0,01 + 0,01} \approx 0,141$. L'inégalité $0,018 \leq 0,141$ est bien vérifiée.

8 Chaîne d'inégalités entre trois normes du plan



Posons $x = (a, b)$. (1) $\max(a^2, b^2) \leq a^2 + b^2$ donne $\|x\|_\infty \leq \|x\|_2$; égalité pour $(1, 0)$.

(2) $(|a| + |b|)^2 = a^2 + b^2 + 2|ab| \geq a^2 + b^2$ donne $\|x\|_2 \leq \|x\|_1$; égalité pour $(1, 0)$.

(3) $2(a^2 + b^2) - (|a| + |b|)^2 = (|a| - |b|)^2 \geq 0$, donc $\|x\|_1 \leq \sqrt{2} \|x\|_2$; égalité pour $(1, 1)$.

(4) $\|x\|_2 \leq \sqrt{2} \|x\|_\infty$ car $a^2 + b^2 \leq 2 \max(a^2, b^2)$, donc $\sqrt{2} \|x\|_2 \leq 2 \|x\|_\infty$; égalité pour $(1, 1)$. Les normes sont donc équivalentes avec des constantes optimales.

9

Un ouvert défini par deux inégalités

★★★

Les applications $(x, y) \mapsto xy$ et $(x, y) \mapsto x$ sont continues. Donc $\{xy > 1\}$, image réciproque de l'ouvert $]1, +\infty[$, et $\{x > 0\}$, image réciproque de $]0, +\infty[$, sont ouverts ; leur intersection A est un ouvert.

Pour montrer que A n'est pas fermé, considérons $a_n = (1 + \frac{1}{n}, 1) : xy = 1 + \frac{1}{n} > 1$ et $x > 0$, donc $a_n \in A$, et $a_n \rightarrow (1, 1)$. Or $1 \times 1 = 1 \not> 1 : (1, 1) \notin A$. La limite d'une suite de A n'est pas dans $A : A$ n'est pas fermé.

10

Densité des nombres dyadiques

★★★

Soit $x \in \mathbb{R}$ et $d_k = \frac{\lfloor 2^k x \rfloor}{2^k} \in D$. Comme $\lfloor 2^k x \rfloor \leq 2^k x < \lfloor 2^k x \rfloor + 1$, on a

$0 \leq x - d_k < 2^{-k}$. Donc $d_k \rightarrow x$: tout réel est limite d'une suite de D , c'est-à-dire $\overline{D} = \mathbb{R}$.

Si f est continue et nulle sur D , alors $f(x) = \lim f(d_k) = \lim 0 = 0$ pour tout x , par continuité séquentielle.

11

Norme d'une forme linéaire selon la norme choisie

★★★

Pour $\|\cdot\|_1 : |2x - 5y| \leq 2|x| + 5|y| \leq 5(|x| + |y|)$, égalité pour $(0, 1) : \|u\| = 5$.

Pour $\|\cdot\|_\infty : |2x - 5y| \leq 7 \max(|x|, |y|)$, égalité pour $(1, -1)$ car $u(1, -1) = 7 : \|u\| = 7$.

Pour $\|\cdot\|_2$: par Cauchy-Schwarz, $|2x - 5y| \leq \sqrt{4 + 25} \|(x, y)\|_2 = \sqrt{29} \|(x, y)\|_2$, égalité pour $\frac{(2, -5)}{\sqrt{29}} : \|u\| = \sqrt{29}$. La norme d'opérateur dépend donc des normes choisies, mais reste finie dans les trois cas.

12 Parties compactes du plan



En dimension finie, compact $\iff$ fermé borné.

(a) Boule fermée : fermée et bornée, compacte. (b) Fermée (image réciproque de $\{1\}$ par $(x, y) \mapsto xy$) mais non bornée : $(n, \frac{1}{n})$ a une norme qui tend vers l'infini ; non compacte. (c) Bornée mais non fermée : $(1, 0)$ est limite de $(1 - \frac{1}{n}, 0)$ sans appartenir à l'ensemble ; non compacte.

(d) Réunion de deux compacts (le cercle est fermé borné, un point aussi) : compacte. (e) Image du compact $[0, 10]$ par l'application continue $x \mapsto (x, \sin x)$: compacte.

13 Suites de Cauchy : une série et la série harmonique



a. Pour $k \geq 2$, $\frac{1}{k^2} \leq \frac{1}{k(k-1)} = \frac{1}{k-1} - \frac{1}{k}$. Par télescopage,

$$u_m - u_n = \sum_{k=n+1}^m \frac{1}{k^2} \leq \frac{1}{n} - \frac{1}{m} < \frac{1}{n}.$$

Pour $\varepsilon > 0$ et $N > 1/\varepsilon$, $m > n \geq N \Rightarrow |u_m - u_n| < \varepsilon$: suite de Cauchy. Comme $\mathbb{R}$ est complet, (u_n) converge.

b. $H_{2n} - H_n = \sum_{k=n+1}^{2n} \frac{1}{k} \geq n \times \frac{1}{2n} = \frac{1}{2}$. Pour $\varepsilon = \frac{1}{2}$, aucun rang N ne convient (prendre $n = N$, $m = 2N$) : (H_n) n'est pas de Cauchy, donc diverge.

14 Le plan privé de l'origine est connexe par arcs



Soient $a, b \neq 0$. Si $0 \notin [a, b]$, le chemin $\gamma(t) = (1-t)a + tb$ convient. Sinon $0 \in [a, b]$ et $b = -\lambda a$ avec $\lambda > 0$. Posons $c = (-a_2, a_1)$, non nul et non colinéaire à a . Les points $(1-t)a + tc$ sont non nuls (combinaison de deux vecteurs indépendants à coefficients non tous nuls), et de même $(1-t)c + tb$ puisque b est colinéaire à a . La concaténation de ces deux segments relie a à b dans $\mathbb{R}^2 \setminus \{0\}$.

Dans $\mathbb{R} \setminus \{0\}$, un chemin continu γ de -1 à 1 prendrait par le théorème des valeurs intermédiaires la valeur 0 : impossible.

15

Normes non équivalentes sur les fonctions continues

★★★

g_n est continue, vaut 1 en 0 et 0 à partir de $t = \frac{1}{n}$: $\|g_n\|_\infty = 1$. Son graphe est un triangle de base $\frac{1}{n}$ et de hauteur 1 : $\|g_n\|_1 = \frac{1}{2n}$.

On a toujours $\|f\|_1 \leq \|f\|_\infty$. Mais s'il existait C avec $\|f\|_\infty \leq C\|f\|_1$, on aurait $1 \leq \frac{C}{2n}$ pour tout n , absurde. Les deux normes ne sont pas équivalentes : le théorème de la dimension finie ne s'applique pas à $C([0, 1])$, de dimension infinie.

16

Distance discrète

★★★

a. $B(a, 1) = \{a\}$ (car $d(a, x) < 1 \iff x = a$), $B(a, 2) = E$ et $B_f(a, 1) = E$.

b. Pour toute partie A et tout $a \in A$, $B(a, 1) = \{a\} \subset A$: A est ouverte. Son complémentaire l'est aussi, donc A est fermée.

c. $u_n \rightarrow \ell \iff d(u_n, \ell) \rightarrow 0 \iff u_n = \ell$ à partir d'un certain rang : les suites convergentes sont les suites stationnaires. $\{a\}$ étant fermé,

$\overline{B(a, 1)} = \{a\} \neq E = B_f(a, 1)$: l'adhérence de la boule ouverte n'est pas la boule fermée.

17 Une distance qui rend $\mathbb{R}$ non complet

★★★

- a. La symétrie est évidente. Si $d(x, y) = 0$, $\arctan x = \arctan y$, et comme $\arctan$ est injective (strictement croissante), $x = y$. Inégalité triangulaire :
 $|\arctan x - \arctan z| \leq |\arctan x - \arctan y| + |\arctan y - \arctan z|$ par l'inégalité triangulaire de $\mathbb{R}$.
- b. $d(0, x) = |\arctan x| < \frac{\pi}{4} \iff |x| < 1$ car $\arctan 1 = \frac{\pi}{4}$ et $\arctan$ est croissante. Donc $B(0, \frac{\pi}{4}) =]-1, 1[$.
- c. $\arctan n \rightarrow \frac{\pi}{2}$, donc $d(n, m) = |\arctan n - \arctan m| \rightarrow 0$ quand $n, m \rightarrow \infty$: suite de Cauchy. Si elle convergeait vers $\ell \in \mathbb{R}$, on aurait $\arctan n \rightarrow \arctan \ell < \frac{\pi}{2}$, ce qui contredit $\arctan n \rightarrow \frac{\pi}{2}$. Donc $(\mathbb{R}, d)$ n'est pas complet, alors que $(\mathbb{R}, |\cdot|)$ l'est : la complétude dépend de la distance, pas seulement de la topologie.

18 Un maximum sur un compact défini par deux contraintes

★★★

- a. F est l'intersection des images réciproques des fermés $] -\infty, 4]$ et $[0, +\infty[$ par les applications continues $(x, y) \mapsto x^2 + y^2$ et $(x, y) \mapsto y - x^2 + 2$: c'est un fermé. Il est contenu dans la boule fermée de rayon 2 : il est borné. Donc F est compact.
- b. f est continue sur le compact F (non vide, car $(0, 0) \in F$) : elle atteint son maximum. Le point $(\sqrt{3}, 1)$ est dans F car $3 + 1 = 4 \leq 4$ et $1 \geq 3 - 2$. Montrons $x \leq \sqrt{3}$ sur F : si $x > \sqrt{3}$, alors $x^2 - 2 > 1$, donc $y \geq x^2 - 2 > 1$ et $y^2 > 1$, d'où $x^2 + y^2 > 3 + 1 = 4$, impossible. Le maximum de f vaut donc $\sqrt{3}$, atteint en $(\sqrt{3}, 1)$.

19 Forme linéaire continue ou non selon la norme

★★★

- a. $|\varphi(f)| \leq \int_0^1 |f| \leq \|f\|_\infty$ et $|\psi(f)| \leq \|f\|_\infty$: les deux sont continues de norme ≤ 1 .
Pour $f = 1$, $\varphi(f) = \psi(f) = 1 = \|f\|_\infty$: $\|\varphi\| = \|\psi\| = 1$.
- b. $|\varphi(f)| \leq \|f\|_1$, égalité pour $f = 1$: φ est continue de norme 1. Pour ψ , f_n est continue, $f_n(\frac{1}{2}) = 1$, et son graphe est un triangle de base $\frac{2}{n}$ et de hauteur 1 contenu dans $[0, 1]$: $\|f_n\|_1 = \frac{1}{n}$. Ainsi $\frac{|\psi(f_n)|}{\|f_n\|_1} = n$ n'est pas borné : ψ n'est pas continue pour $\|\cdot\|_1$, alors qu'elle l'est pour $\|\cdot\|_\infty$.

20 Point fixe de $x \mapsto 1 + \frac{1}{1+x^2}$

★★★

- a. f est décroissante : $f(2) = \frac{6}{5} \leq f(x) \leq f(1) = \frac{3}{2}$, donc $f(F) \subset [\frac{6}{5}, \frac{3}{2}] \subset F$. On a $f'(x) = -\frac{2x}{(1+x^2)^2}$; la fonction $g(x) = \frac{2x}{(1+x^2)^2}$ a pour dérivée $\frac{2-6x^2}{(1+x^2)^3} < 0$ sur $[1, 2]$, donc $|f'| \leq g(1) = \frac{1}{2}$. Par l'inégalité des accroissements finis, f est $\frac{1}{2}$ -lipschitzienne.
- b. F est fermé dans $\mathbb{R}$ complet : le théorème de Banach donne un unique point fixe ℓ . Il vérifie $\ell = 1 + \frac{1}{1+\ell^2}$, soit $\ell(1+\ell^2) = 1 + \ell^2 + 1$, c'est-à-dire $\ell^3 - \ell^2 + \ell - 2 = 0$. Avec $P(x) = x^3 - x^2 + x - 2$: $P(1,35) \approx -0,0121 < 0$ et $P(1,36) \approx 0,0259 > 0$; par le TVI, $\ell \in [1,35 ; 1,36]$.
- c. $u_1 = 1 + \frac{1}{2} = \frac{3}{2}$ et $u_2 = 1 + \frac{1}{1+9/4} = 1 + \frac{4}{13} = \frac{17}{13} \approx 1,3077$. La majoration a priori donne $|u_n - \ell| \leq \frac{(1/2)^n}{1-1/2} |u_1 - u_0| = \frac{(1/2)^n}{1/2} \times \frac{1}{2} = 2^{-n}$. Comme $2^{-10} = \frac{1}{1024} < 10^{-3}$, $n = 10$ suffit.

21 Image d'un cercle par une forme linéaire

★★★

- a. L'application $\gamma(t) = (\cos 2\pi t, \sin 2\pi t)$ est continue de $[0, 1]$ dans $\mathcal{C}$ et surjective sur $\mathcal{C}$. Pour deux points $\gamma(s)$ et $\gamma(t)$, le chemin $\tau \mapsto \gamma((1-\tau)s + \tau t)$ les relie : $\mathcal{C}$ est connexe par arcs.
- b. f est continue : $f(\mathcal{C})$ est connexe par arcs dans $\mathbb{R}$, donc un intervalle. Par Cauchy-Schwarz, $|f(x, y)| \leq \sqrt{5}$ sur $\mathcal{C}$. Pour φ tel que $\cos \varphi = \frac{1}{\sqrt{5}}$ et $\sin \varphi = \frac{2}{\sqrt{5}}$, on a $f(\cos t, \sin t) = \sqrt{5} \cos(t - \varphi)$, qui vaut $\sqrt{5}$ en $t = \varphi$ et $-\sqrt{5}$ en $t = \varphi + \pi$. Donc $f(\mathcal{C}) = [-\sqrt{5}, \sqrt{5}]$.

22 $(C([0, 1]), \|\cdot\|_1)$ n'est pas complet

★★★

- a. L'aire sous f_n se compose d'un triangle de base $\frac{1}{n}$ et de hauteur 1, soit $\frac{1}{2n}$, et d'un rectangle de largeur $\frac{1}{2} - \frac{1}{n}$ et de hauteur 1 : $\int_0^1 f_n = \frac{1}{2} - \frac{1}{2n}$. Pour $m \geq n$, $f_m \geq f_n$ (la pente de f_m est plus forte), donc $\|f_m - f_n\|_1 = \int f_m - \int f_n = \frac{1}{2m} - \frac{1}{2n} < \frac{1}{2n}$, qui tend vers 0 : la suite est de Cauchy.
- b. Supposons $\|f_n - f\|_1 \rightarrow 0$ avec f continue. Comme $f_n = 0$ sur $[0, \frac{1}{2}]$, $\int_0^{1/2} |f| \leq \|f_n - f\|_1 \rightarrow 0$; $|f|$ étant continue, positive et d'intégrale nulle, $f = 0$ sur $[0, \frac{1}{2}]$. De même, pour tout $a > \frac{1}{2}$, $f_n = 1$ sur $[a, 1]$ à partir d'un rang, d'où $f = 1$ sur $[a, 1]$, donc sur $]\frac{1}{2}, 1]$. Alors f vaut 0 en $\frac{1}{2}$ et tend vers 1 à droite : elle n'est pas continue, contradiction. L'espace n'est pas complet.

Le livre d'exercices corrigés de maths Licence L2

Tout le programme en un seul PDF de 128 pages, à imprimer ou à garder sur ta tablette.

Voir le livre



Entraîne-toi : défi express de Licence L2

[Changer de niveau](#)

Niveau : Licence L2

6 questions au hasard, correction tout de suite.



Lancer le défi



Zyro te conseille la suite



Exercices de maths

Topologie des espaces métriques et normés : exercices de maths Licence L2



QCM de maths

Topologie des espaces métriques et normés : QCM de maths Licence L2



Contrôles de maths



Exercices de maths

Topologie des espaces métriques et normés : contrôle de maths Licence L2

Calcul différentiel à plusieurs variables : exercices de maths Licence L2

 **Exercices de maths**

Intégrales généralisées et à paramètre : exercices de maths Licence L2

 **QCM de maths**

Calcul différentiel à plusieurs variables : QCM de maths Licence L2

Zyro vous emmène sur nos sites partenaires

Embarquez pour d'autres planètes du savoir et leurs applis.

Décollage