

Topologie des espaces métriques et normés : corrigé du contrôle de maths Licence L2 à télécharger en PDF



Le livre de contrôles corrigés de maths Licence L2

Tout le programme en un seul PDF de 50 pages, à imprimer ou à garder sur ta tablette.

[Voir le livre](#)

Corrigé du contrôle avec le barème détaillé. Compte tes points et repère ce qu'il faut revoir.

Durée conseillée : 45 minutes. Barème sur 20 points. Calculatrice autorisée seulement quand l'énoncé le précise.

1

Normes d'un vecteur de $\mathbb{R}^3$

/ 4 pts

- $\|x\|_1 = 2 + 6 + 9 = 17$; $\|x\|_2 = \sqrt{4 + 36 + 81} = \sqrt{121} = 11$; $\|x\|_\infty = 9$. (1,5 pt)
- $x - y = (-3, 8, -11)$, donc $\|x - y\|_1 = 3 + 8 + 11 = 22$ et $\|x - y\|_\infty = 11$. (1 pt)
- $9 \leq 11 \leq 17$ et $17 \leq 3 \times 9 = 27$: la chaîne est vérifiée. (1,5 pt)

2 Topologie d'une partie de $\mathbb{R}$

/ 3 pts

- a. $\mathring{A} =]0, 1[$: les points **2** et **3** et $3 - \frac{1}{n}$ sont isolés dans A , et **0** n'a pas de boule incluse dans A . (1 pt)
- b. $3 - \frac{1}{n} \rightarrow 3 \notin A$, et **1** est limite de points de $]0, 1[$. Donc $\overline{A} = [0, 1] \cup \{2\} \cup \{3 - \frac{1}{n} : n \geq 2\} \cup \{3\}$. (1 pt)
- c. Frontière $= \overline{A} \setminus \mathring{A} = \{0, 1, 2, 3\} \cup \{3 - \frac{1}{n} : n \geq 2\}$. A n'est pas ouverte (**0** $\in A$ sans voisinage dans A) ni fermée (**1** $\in \overline{A} \setminus A$). (1 pt)

3 Une suite du plan et un compact

/ 3 pts

- a. $\frac{2n^2 + 1}{n^2 + n} \rightarrow 2$ et $(\frac{1}{2})^n \rightarrow 0 : \ell = (2, 0)$. (1 pt)
- b. $\frac{2n^2 + 1}{n^2 + n} - 2 = \frac{1 - 2n}{n^2 + n}$, de valeur absolue $\frac{2n - 1}{n(n + 1)} \leq \frac{2}{n}$; et $2^{-n} \leq \frac{1}{n} \leq \frac{2}{n}$.
Donc $\|u_n - \ell\|_\infty \leq \frac{2}{n} < 0,01$ dès que $n > 200 : N = 201$ convient. (1 pt)
- c. K est borné (suite convergente, donc bornée). Il est fermé : une suite de K a une sous-suite soit stationnaire (un u_n répété), soit formée de termes d'indices tendant vers l'infini, donc convergeant vers $\ell \in K$. En dimension finie, K est compact. (1 pt)

4 Norme d'opérateur d'un endomorphisme du plan

/ 4 pts

- a. $|x + 2y| \leq |x| + 2|y| \leq 3\|(x, y)\|_\infty$ et $|3x - y| \leq 3|x| + |y| \leq 4\|(x, y)\|_\infty$. Donc $\|u(x, y)\|_\infty \leq 4\|(x, y)\|_\infty$. (1,5 pt)
- b. Pour $(1, -1) : u(1, -1) = (-1, 4)$ de norme **4** $= 4\|(1, -1)\|_\infty$. La constante **4** est donc atteinte : $\|u\| = 4$. (1,5 pt)
- c. Le déterminant vaut $1 \times (-1) - 2 \times 3 = -7 \neq 0 : u$ est bijective. Son inverse est linéaire sur un espace de dimension finie, donc continue. (1 pt)

5 Extrema d'une forme linéaire sur un losange

/ 3 pts

- a. K est l'image réciproque du fermé $[0, 2]$ par l'application continue $(x, y) \mapsto |x| + |y|$: il est fermé. Il est contenu dans la boule fermée de rayon 2 pour $\|\cdot\|_1$ (norme équivalente à toutes les autres) : il est borné. Il est donc compact. (1,5 pt)
- b. Sur K , $f(x, y) \leq |x| + 3|y| \leq 3(|x| + |y|) \leq 6$, et $f(0, 2) = 6$ avec $(0, 2) \in K$. Le maximum est 6, atteint en $(0, 2)$. (1,5 pt)

6 Point fixe de $\frac{1}{3} + \frac{1}{4}\sin x$

/ 3 pts

- a. $g'(x) = \frac{1}{4}\cos x$, donc $|g'| \leq \frac{1}{4}$ et, par l'inégalité des accroissements finis, g est $\frac{1}{4}$ -lipschitzienne : c'est une contraction. (1 pt)
- b. $\mathbb{R}$ est complet et $g(\mathbb{R}) \subset \mathbb{R}$: le théorème de Banach donne un unique point fixe ℓ . (1 pt)
- c. $u_1 = g(0) = \frac{1}{3}$. La majoration a priori donne
- $$|u_n - \ell| \leq \frac{(1/4)^n}{1 - 1/4} |u_1 - u_0| = \frac{4}{3} \times \frac{1}{3} \left(\frac{1}{4}\right)^n = \frac{4}{9} \left(\frac{1}{4}\right)^n. \text{ (1 pt)}$$

Le livre de contrôles corrigés de maths Licence L2

Tout le programme en un seul PDF de 50 pages, à imprimer ou à garder sur ta tablette.

Voir le livre



Entraîne-toi : défi express de Licence
L2

Changer de niveau

Niveau : Licence L2

6 questions au hasard, correction tout de suite.



Lancer le défi



Zyro te conseille la suite



Contrôles de maths

Topologie des espaces métriques et normés : contrôle de maths Licence L2



Cours de maths

Topologie des espaces métriques et normés : cours de maths Licence L2



QCM de maths

Topologie des espaces métriques et normés : QCM de maths Licence L2



Contrôles de maths

Calcul différentiel à plusieurs variables : contrôle de maths Licence L2



Contrôles de maths

Intégrales généralisées et à paramètre :
contrôle de maths Licence L2



Cours de maths

Calcul différentiel à plusieurs variables :
cours de maths Licence L2

Zyro vous emmène sur nos sites partenaires

Embarquez pour d'autres planètes du savoir et leurs applis.

Décollage