

Topologie des espaces vectoriels normés : exercices de maths Maths Spé à télécharger en PDF



Le livre d'exercices corrigés de maths Maths Spé

Tout le programme en un seul PDF de 133 pages, à imprimer ou à garder sur ta tablette.

[Voir le livre](#)

20 exercices classés par difficulté (★ facile, ★★ moyen, ★★★ difficile). Cherche d'abord sans regarder le corrigé !

1 Trois normes sur des vecteurs

★☆☆

Dans $\mathbb{R}^2$, calculer N_1 , N_2 et N_∞ du vecteur $x = (3, -4)$. Faire de même dans $\mathbb{R}^3$ pour $y = (1, -2, 2)$, puis vérifier dans chaque cas l'encadrement $N_\infty \leq N_2 \leq N_1 \leq \sqrt{n} N_2$.

2 Norme ou pas ?

★☆☆

Pour chaque application N de $\mathbb{R}^2$ dans $\mathbb{R}_+$, dire si c'est une norme (justifier) :

- a) $N(x, y) = |x| + 3|y|$; b) $N(x, y) = |x - y|$; c) $N(x, y) = \sqrt{x^2 + 4y^2}$; d) $N(x, y) = |xy|$.

3 Boules et aires



- a) Dans $\mathbb{R}$ muni de la valeur absolue, déterminer la boule ouverte $B(2,5 ; 1,5)$.
- b) Dans $\mathbb{R}^2$, décrire la boule fermée de centre $(1, -2)$ et de rayon 3 pour N_∞ , pour N_1 et pour N_2 , puis calculer leurs aires.

4 Adhérence, intérieur, frontière



Dans $\mathbb{R}$, soit $A = [-2, -1[\cup]0, 1[\cup \{3\}$. Déterminer $\mathring{A}$, $\overline{A}$ et $\text{Fr}(A)$. La partie A est-elle ouverte ? fermée ?

5 Convergence dans le plan



Dans $(\mathbb{R}^2, N_\infty)$, on pose $u_n = \left(\frac{n+1}{n}, e^{-n} \right)$ pour $n \geq 1$. Montrer que (u_n) converge vers $\ell = (1, 0)$ et trouver le plus petit entier N tel que $N_\infty(u_n - \ell) < 0,01$ pour tout $n \geq N$.

6 Trois normes de fonctions



Dans $\mathcal{C}([0, 1])$, soit $h(t) = t^2$ et $k(t) = t^3$. Calculer $\|h - k\|_\infty$, $\|h - k\|_1$ et $\|h - k\|_2$.

7 Ouvert ou fermé par image réciproque



En utilisant la continuité de fonctions bien choisies, dire si les parties suivantes de $\mathbb{R}^2$ sont ouvertes, fermées, ou aucun des deux : $A = \{x^2 + y^2 < 9\}$; $B = \{xy = 1\}$; $C = \{x \geq 0, y \geq 0, x + y \leq 2\}$; $D = \{y > x^2\}$.

8

Comparer N_1 , N_2 , N_∞ sur $\mathbb{R}^2$

★★★

Montrer que pour tout $(x, y) \in \mathbb{R}^2$: $N_\infty \leq N_2 \leq N_1 \leq \sqrt{2} N_2 \leq 2N_\infty$. Pour chaque inégalité, indiquer un vecteur non nul qui réalise l'égalité.

9

Norme d'une forme linéaire

★★★

Pour $f \in \mathcal{C}([0, 1])$, on pose $T(f) = \int_0^1 t f(t) dt$.

- a) Montrer que T est continue pour $\|\cdot\|_\infty$ et calculer $\|T\|$.
 b) Même question pour $\|\cdot\|_1$ (on testera $f_n(t) = t^n$).

10

La dérivation n'est pas continue

★★★

Sur l'espace $\mathbb{R}[X]$ muni de la norme $\|P\| = \max_{[0,1]} |P|$, on note $D(P) = P'$.

- a) Calculer $\|X^n\|$ et $\|D(X^n)\|$ pour $n \geq 1$.
 b) En déduire que D n'est pas continue.
 c) Pourquoi la restriction de D à $\mathbb{R}_3[X]$ est-elle continue ?

11

Quelles parties sont compactes ?

★★★

Parmi les parties de $\mathbb{R}^2$ suivantes, lesquelles sont compactes ? a) $[0, 1] \times [2, 3]$; b) $\{x^2 + y^2 < 1\}$; c) $\{x^2 + y^2 = 4\}$; d) $\{xy = 1\}$; e) $\{|x| + |y| \leq 5\}$.

12

Extremum sur un cercle

★★★

Montrer que $f(x, y) = 2x + 3y$ admet un maximum et un minimum sur le cercle $x^2 + y^2 = 1$, et les calculer ainsi que les points où ils sont atteints.

13 Un ensemble non connexe par arcs



Soit $A = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 : xy \neq 0\}$.

- a) Montrer que $(1, 1)$ et $(1, -1)$ ne peuvent pas être reliés par un chemin dans A .
- b) Montrer que $\mathbb{R}^2 \setminus \{(0, 0)\}$ est connexe par arcs.

14 Suite de Cauchy dans $\mathbb{Q}$



On définit $x_0 = 1$ et $x_{n+1} = \frac{1}{2} \left(x_n + \frac{2}{x_n} \right)$.

- a) Calculer x_1, x_2, x_3 (fractions).
- b) Calculer $x_3^2 - 2$.
- c) La suite converge dans $\mathbb{R}$ vers $\sqrt{2}$. En déduire que $\mathbb{Q}$ n'est pas complet.

15 Ouvert et fermé dans $\mathcal{C}([0, 1])$



Dans $(\mathcal{C}([0, 1]), \|\cdot\|_\infty)$:

- a) Soit $U = \{f : f(t) > 0 \forall t \in [0, 1]\}$. Pour $f(t) = t^2 + \frac{1}{2}$, montrer que $B(f, \frac{1}{2}) \subset U$. En déduire que U est ouvert.
- b) Montrer que $F = \{f : f(0) = 0\}$ est fermé.
- c) Montrer que $V = \{f : f \geq 0\}$ est fermé.

16 Normes non équivalentes



Dans $\mathcal{C}([0, 1])$, on considère $f_n(t) = t^n$.

- a) Calculer $\|f_n\|_\infty, \|f_n\|_1, \|f_n\|_2$.
- b) Montrer que $\|\cdot\|_\infty$ n'est équivalente ni à $\|\cdot\|_1$ ni à $\|\cdot\|_2$.
- c) Montrer que $\|f\|_1 \leq \|f\|_2 \leq \|f\|_\infty$ pour toute f .

17 Norme d'une matrice et groupe linéaire

★★★★

On munit $\mathbb{R}^2$ de la norme euclidienne et $\mathcal{M}_2(\mathbb{R})$ de la norme subordonnée

$\|M\| = \sup_{N_2(x)=1} N_2(Mx)$. Soit $A = \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$.

- a) Calculer $\|A\|$ (on rappelle que $\|A\|^2$ est la plus grande valeur propre de $A^T A$).
- b) Montrer que $GL_2(\mathbb{R})$ est un ouvert de $\mathcal{M}_2(\mathbb{R})$.
- c) Montrer qu'il n'est pas connexe par arcs.

18 La boule unité n'est pas compacte

★★★★

Sur $\mathbb{R}[X]$, on pose $\|P\| = \max_i |a_i|$ pour $P = \sum a_i X^i$ (c'est une norme). Soit $e_n = X^n$.

- a) Calculer $\|e_n\|$ et $\|e_n - e_m\|$ pour $n \neq m$.
- b) En déduire que la boule unité fermée n'est pas compacte.

19 Point fixe de $x \mapsto \frac{1}{2} \cos x$

★★★★

Soit $f(x) = \frac{1}{2} \cos x$ sur $\mathbb{R}$ et $u_0 = 0$, $u_{n+1} = f(u_n)$.

- a) Montrer que f est $\frac{1}{2}$ -lipschitzienne et que f admet un unique point fixe ℓ .
- b) Montrer que $|u_n - \ell| \leq 2^{-n}$.
- c) Combien d'itérations garantissent une erreur inférieure à 10^{-6} ?

20 Distance à une boule

★★★★

Soit $(E, \|\cdot\|)$ un evn et x un vecteur avec $\|x\| > 1$. Montrer que la distance de x à la boule unité fermée $B_f(0, 1)$ vaut $\|x\| - 1$. Application : pour $x = (3, 4)$, donner cette distance dans $(\mathbb{R}^2, N_1)$, $(\mathbb{R}^2, N_2)$ et $(\mathbb{R}^2, N_\infty)$, chaque fois pour la boule de la même norme.

Le livre d'exercices corrigés de maths Maths Spé

Tout le programme en un seul PDF de 133 pages, à imprimer ou à garder sur ta tablette.

Voir le livre

Zyro te conseille la suite

Exercices corrigés de maths

Topologie des espaces vectoriels normés
: exercices corrigés de maths Maths Spé

Cours de maths

Topologie des espaces vectoriels normés
: cours de maths Maths Spé

QCM de maths

Topologie des espaces vectoriels normés
: QCM de maths Maths Spé

Exercices corrigés de maths

Calcul différentiel : exercices corrigés de
maths Maths Spé

✓ **Exercices corrigés de maths**

Équations différentielles linéaires :
exercices corrigés de maths Maths Spé

■ **Cours de maths**

Calcul différentiel : cours de maths
Maths Spé

Zyro vous emmène sur nos sites partenaires

Embarquez pour d'autres planètes du savoir et leurs applis.

Décollage