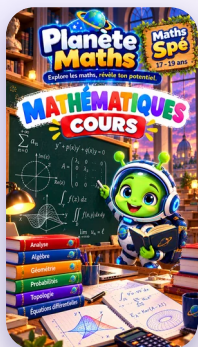


Topologie des espaces vectoriels normés : cours de maths Maths Spé à télécharger en PDF



Le livre de cours de maths Maths Spé

Tout le programme en un seul PDF de 103 pages, à imprimer ou à garder sur ta tablette.

[Voir le livre](#)

En analyse, presque tout repose sur une idée simple : savoir dire que deux objets sont « proches ». Une norme fournit cette notion de proximité dans un espace vectoriel, et la topologie en déduit ce qu'est un voisinage, une limite, une fonction continue. Ce chapitre rassemble les outils indispensables des espaces vectoriels normés : ouverts, fermés, compacité, connexité par arcs, applications linéaires continues et complétude. On note $\mathbb{K}$ le corps $\mathbb{R}$ ou $\mathbb{C}$, et E un $\mathbb{K}$ -espace vectoriel.

1. Normes et distances

D Norme

Une norme sur E est une application $N : E \rightarrow \mathbb{R}_+$ vérifiant, pour tous $x, y \in E$ et $\lambda \in \mathbb{K}$:

- séparation : $N(x) = 0 \Rightarrow x = 0$;
- homogénéité : $N(\lambda x) = |\lambda| N(x)$;
- inégalité triangulaire : $N(x + y) \leq N(x) + N(y)$.

Le couple (E, N) est un espace vectoriel normé (evn). La distance associée est $d(x, y) = N(x - y)$.

Sur $\mathbb{K}^n$, trois normes usuelles sont $N_1(x) = \sum |x_i|$, $N_2(x) = \sqrt{\sum |x_i|^2}$ et $N_\infty(x) = \max |x_i|$.
Sur l'espace $\mathcal{C}([0, 1])$ des fonctions continues, on utilise $\|f\|_\infty = \max |f|$, $\|f\|_1 = \int_0^1 |f|$ et $\|f\|_2 = (\int_0^1 f^2)^{1/2}$.

P Inégalité triangulaire renversée

Pour tous x, y : $|\|x\| - \|y\|| \leq \|x - y\|$. En particulier la norme est 1-lipschitzienne.

E Exemple 1 : trois normes d'un même vecteur

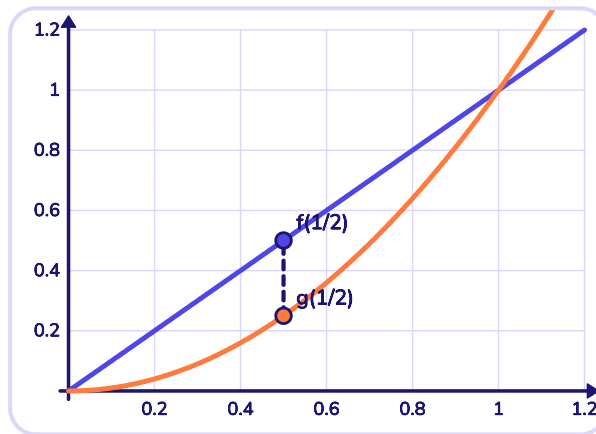
Pour $x = (-2, 5, 1)$: $N_1(x) = 2 + 5 + 1 = 8$, $N_2(x) = \sqrt{4 + 25 + 1} = \sqrt{30}$ et $N_\infty(x) = 5$. On remarque $5 \leq \sqrt{30} \leq 8$.

E

Exemple 2 : distance entre deux fonctions

Dans $\mathcal{C}([0, 1])$, soit $f(t) = t$ et $g(t) = t^2$. Alors $f - g = t(1 - t)$ est maximale en $t = \frac{1}{2}$, de valeur $\frac{1}{4}$, donc $\|f - g\|_\infty = \frac{1}{4}$. Pour la norme 1 :

$\|f - g\|_1 = \int_0^1 (t - t^2) dt = \frac{1}{6}$. Deux fonctions peuvent donc être « proches » pour une norme et moins pour une autre.



2. Boules, ouverts, fermés

D

Boules et sphères

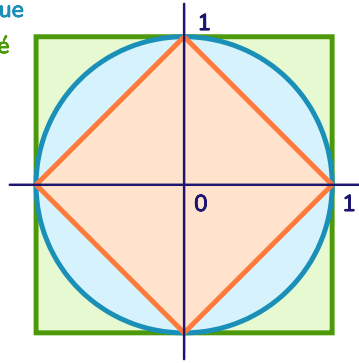
Pour $a \in E$ et $r > 0$: boule ouverte $B(a, r) = \{x : \|x - a\| < r\}$, boule fermée $B_f(a, r) = \{x : \|x - a\| \leq r\}$, sphère $S(a, r) = \{x : \|x - a\| = r\}$.

La forme des boules dépend de la norme. Dans $\mathbb{R}^2$, la boule unité fermée est un losange pour N_1 , un disque pour N_2 , un carré pour N_∞ , et on a l'inclusion $B_f^{N_1} \subset B_f^{N_2} \subset B_f^{N_\infty}$.

$N_1 \leq 1$: losange

$N_2 \leq 1$: disque

$N_\infty \leq 1$: carré



D

Ouvert, fermé

Une partie U est ouverte si pour tout $x \in U$, il existe $r > 0$ tel que $B(x, r) \subset U$. Une partie F est fermée si son complémentaire est ouvert.

P

Stabilités

Toute réunion d'ouverts est un ouvert ; toute intersection *finie* d'ouverts est un ouvert. Duallement, toute intersection de fermés est un fermé ; toute réunion *finie* de fermés est un fermé. Les boules ouvertes sont ouvertes, les boules fermées et les sphères sont fermées.

A

Erreur classique

L'intersection infinie $\bigcap_{n \geq 1}]-\frac{1}{n}, \frac{1}{n}[= \{0\}$ n'est pas ouverte. « Ouvert » et « fermé » ne sont pas contraires : $[0, 1[$ n'est ni l'un ni l'autre, et E comme $\emptyset$ sont à la fois ouverts et fermés.

3. Adhérence et intérieur

D Adhérence, intérieur, frontière

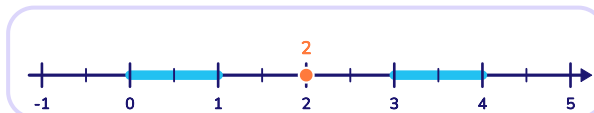
Pour $A \subset E$: l'intérieur $\mathring{A}$ est le plus grand ouvert contenu dans A ; l'adhérence $\overline{A}$ est le plus petit fermé contenant A ; la frontière est $\text{Fr}(A) = \overline{A} \setminus \mathring{A}$.

P Caractérisation séquentielle

$x \in \overline{A}$ si et seulement si x est limite d'une suite d'éléments de A . Ainsi A est fermée si et seulement si toute limite d'une suite convergente d'éléments de A appartient à A . Une partie A est dense dans E si $\overline{A} = E$.

E Exemple 3 : adhérence et intérieur

Soit $A =]0, 1[\cup \{2\} \cup]3, 4[$ dans $\mathbb{R}$. Alors $\overline{A} = [0, 1] \cup \{2\} \cup [3, 4]$, $\mathring{A} =]0, 1[\cup]3, 4[$ et $\text{Fr}(A) = \{0, 1, 2, 3, 4\}$. Le point isolé 2 est dans l'adhérence mais pas dans l'intérieur.



4. Limites et continuité

Une suite (u_n) converge vers ℓ si $\|u_n - \ell\| \rightarrow 0$. Pour $f : A \rightarrow F$ entre evn, f est continue en a si $\forall \varepsilon > 0, \exists \delta > 0, \|x - a\| < \delta \Rightarrow \|f(x) - f(a)\| < \varepsilon$.

P**Trois caractérisations de la continuité**

Pour $f : E \rightarrow F$, il y a équivalence entre : (i) f est continue sur E ; (ii) pour toute suite $u_n \rightarrow a$, $f(u_n) \rightarrow f(a)$; (iii) l'image réciproque de tout ouvert (resp. fermé) de F est un ouvert (resp. fermé) de E .

La propriété (iii) sert à montrer qu'une partie est ouverte ou fermée : $\{(x, y) : x^2 + y^2 < 9\}$ est ouvert car image réciproque de $] - \infty, 9[$ par une fonction continue, tandis que $\{(x, y) : xy = 1\}$ est fermé comme image réciproque de $\{1\}$. Toute fonction lipschitzienne est continue.

5. Compacité**D****Partie compacte**

Une partie K de E est compacte si de toute suite d'éléments de K on peut extraire une sous-suite qui converge vers un élément de K (propriété de Bolzano-Weierstrass).

P**Résultats fondamentaux**

- Un compact est fermé et borné.
- En dimension finie, les compacts sont exactement les fermés bornés.
- L'image d'un compact par une application continue est un compact.
- Une fonction continue $f : K \rightarrow \mathbb{R}$ sur un compact est bornée et atteint ses bornes.
- (Riesz) La boule unité fermée de E est compacte si et seulement si E est de dimension finie.

E Exemple 4 : un extremum garanti

La fonction $f(x, y) = x + 2y$ est continue sur le cercle unité de $\mathbb{R}^2$, fermé et borné donc compact : elle y atteint un maximum et un minimum. Par l'inégalité de Cauchy-Schwarz, $|x + 2y| \leq \sqrt{5}$, avec égalité en $\pm \left(\frac{1}{\sqrt{5}}, \frac{2}{\sqrt{5}} \right)$: le maximum vaut $\sqrt{5}$ et le minimum $-\sqrt{5}$.

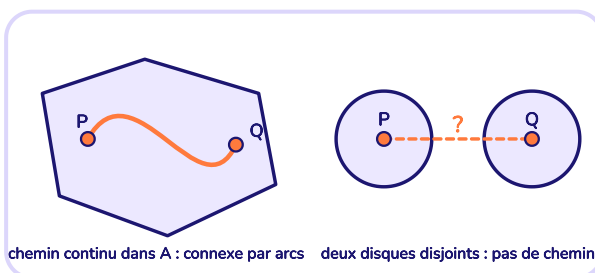
I 6. Connexité par arcs

D Partie connexe par arcs

Une partie A est connexe par arcs si deux points quelconques $P, Q \in A$ peuvent être reliés par un chemin, c'est-à-dire une application continue $\gamma : [0, 1] \rightarrow A$ avec $\gamma(0) = P$ et $\gamma(1) = Q$.

P Propriétés

Les parties connexes par arcs de $\mathbb{R}$ sont exactement les intervalles. Toute partie convexe est connexe par arcs. L'image d'une partie connexe par arcs par une application continue est connexe par arcs ; en particulier, l'image d'un connexe par arcs de $\mathbb{R}$ est un intervalle (théorème des valeurs intermédiaires).



E Exemple 5 : le plan privé de l'origine

$\mathbb{R}^2 \setminus \{(0, 0)\}$ est connexe par arcs : si le segment $[a, b]$ évite l'origine, il convient ; sinon on choisit un point c hors de la droite (ab) et on suit $[a, c]$ puis $[c, b]$. En revanche $\mathbb{R}^* =]-\infty, 0[\cup]0, +\infty[$ n'est pas connexe par arcs : un chemin de -1 à 1 prendrait la valeur 0 .

7. Applications linéaires continues

P Continuité d'une application linéaire

Soit $T : E \rightarrow F$ linéaire. Il y a équivalence entre : (i) T est continue ; (ii) T est continue en 0 ; (iii) T est bornée sur la boule unité ; (iv) il existe $C \geq 0$ tel que $\|T(x)\| \leq C \|x\|$ pour tout x . Le plus petit C est la norme subordonnée $\|T\| = \sup_{\|x\| \leq 1} \|T(x)\|$.

Si E est de dimension finie, toute application linéaire définie sur E est continue. Pour des applications composables, $\|S \circ T\| \leq \|S\| \|T\|$. L'ensemble $\mathcal{L}_c(E, F)$ des applications linéaires continues est un espace vectoriel normé par $\|\cdot\|$.

E Exemple 6 : une forme linéaire continue

Sur $(\mathcal{C}([0, 1]), \|\cdot\|_\infty)$, la forme $\varphi(f) = \int_0^1 f(t) dt$ vérifie $|\varphi(f)| \leq \|f\|_\infty$, donc φ est continue et $\|\varphi\| \leq 1$. Pour $f = 1$ on a égalité, donc $\|\varphi\| = 1$.



Dimension infinie

En dimension infinie, une application linéaire peut être discontinue. Sur les polynômes munis de $\|\cdot\|_\infty$ sur $[0, 1]$, la dérivation envoie X^n (de norme 1) sur nX^{n-1} (de norme n) : elle n'est pas bornée.

8. Normes équivalentes



Équivalence

Deux normes N et N' sur E sont équivalentes s'il existe $\alpha, \beta > 0$ tels que $\alpha N \leq N' \leq \beta N$. Elles définissent alors les mêmes ouverts, les mêmes suites convergentes, les mêmes fonctions continues et les mêmes suites de Cauchy.



Dimension finie

Sur un espace de dimension finie, toutes les normes sont équivalentes. Sur $\mathbb{K}^n$: $N_\infty \leq N_2 \leq N_1 \leq \sqrt{n} N_2 \leq n N_\infty$.



Le conseil de Zyro

Quand on te demande une propriété topologique en dimension finie (convergence, compacité, continuité), choisis la norme la plus commode : le résultat ne dépend pas d'elle.

En dimension infinie, c'est faux. Sur $\mathcal{C}([0, 1])$, les fonctions $f_n(t) = t^n$ vérifient $\|f_n\|_\infty = 1$ mais $\|f_n\|_1 = \frac{1}{n+1} \rightarrow 0$: aucune constante C ne donne $\|f\|_\infty \leq C\|f\|_1$, donc ces deux normes ne

sont pas équivalentes.

9. Complétude

D Suite de Cauchy, espace complet

Une suite (u_n) est de Cauchy si $\forall \varepsilon > 0, \exists N, \forall p, q \geq N, \|u_p - u_q\| < \varepsilon$. Un evn dans lequel toute suite de Cauchy converge est dit complet (espace de Banach).

P Résultats

- Toute suite convergente est de Cauchy ; une suite de Cauchy est bornée.
- Tout evn de dimension finie est complet ; $\mathbb{R}$ est complet, $\mathbb{Q}$ ne l'est pas.
- $(\mathcal{C}([0, 1]), \|\cdot\|_\infty)$ est complet, mais pas pour $\|\cdot\|_1$.
- Une partie fermée d'un espace complet est complète.

M Méthode : théorème du point fixe de Banach

Soit F une partie fermée non vide d'un espace complet et $f : F \rightarrow F$ contractante, c'est-à-dire k -lipschitzienne avec $k < 1$. Alors :

1. f possède un unique point fixe ℓ ;
2. toute suite $u_{n+1} = f(u_n)$ converge vers ℓ ;
3. l'erreur vérifie $\|u_n - \ell\| \leq \frac{k^n}{1 - k} \|u_1 - u_0\|$.

E**Exemple 7 : point fixe**

La fonction $f(x) = 1 + \frac{1}{3} \cos x$ est $\frac{1}{3}$ -lipschitzienne sur $\mathbb{R}$ car $|f'| \leq \frac{1}{3}$. L'équation $f(x) = x$ a donc une unique solution, limite de $u_{n+1} = f(u_n)$ quel que soit u_0 .

À retenir

- Une norme donne une distance ; la forme des boules dépend de la norme.
- Ouvert : chaque point est le centre d'une boule incluse. Fermé : complémentaire d'un ouvert, stable par limites de suites.
- f continue $\iff$ l'image réciproque d'un ouvert est un ouvert $\iff$ caractérisation séquentielle.
- Compact : toute suite a une valeur d'adhérence dans la partie. En dimension finie, compact $\iff$ fermé borné ; une fonction continue sur un compact atteint ses bornes.
- Connexe par arcs : deux points quelconques sont reliés par un chemin ; dans $\mathbb{R}$, ce sont les intervalles.
- T linéaire est continue $\iff \|T(x)\| \leq C\|x\|$; automatique en dimension finie.
- Dimension finie : normes équivalentes, espace complet, boule fermée compacte. En dimension infinie, aucune de ces trois propriétés n'est garantie.
- Application contractante d'un complet : point fixe unique et convergence géométrique.

Le livre de cours de maths Maths Spé

Tout le programme en un seul PDF de 103 pages, à imprimer ou à garder sur ta tablette.

[Voir le livre](#)

 Zyro te conseille la suite

 Exercices de maths

Topologie des espaces vectoriels normés
: exercices de maths Maths Spé

 Contrôles de maths

Topologie des espaces vectoriels normés
: contrôle de maths Maths Spé

 QCM de maths

Topologie des espaces vectoriels normés
: QCM de maths Maths Spé

 Exercices de maths

Calcul différentiel : exercices de maths
Maths Spé

 Exercices de maths

 Contrôles de maths

Équations différentielles linéaires :
exercices de maths Maths Spé

Calcul différentiel : contrôle de maths
Maths Spé

Zyro vous emmène sur nos sites partenaires

Embarquez pour d'autres planètes du savoir et leurs applis.

Décollage