

Topologie des espaces vectoriels normés : exercices corrigés de maths Maths Spé à télécharger en PDF



Le livre d'exercices corrigés de maths Maths Spé

Tout le programme en un seul PDF de 133 pages, à imprimer ou à garder sur ta tablette.

[Voir le livre](#)

Corrigés rédigés des exercices du chapitre. Vérifie chaque étape, puis corrige-toi.

1 Trois normes sur des vecteurs



Pour $x = (3, -4)$: $N_1 = 3 + 4 = 7$, $N_2 = \sqrt{9 + 16} = 5$, $N_\infty = \max(3, 4) = 4$. Et $4 \leq 5 \leq 7 \leq \sqrt{2} \times 5 \approx 7,07$: l'encadrement est vérifié.

Pour $y = (1, -2, 2)$: $N_1 = 5$, $N_2 = \sqrt{1 + 4 + 4} = 3$, $N_\infty = 2$. Et $2 \leq 3 \leq 5 \leq \sqrt{3} \times 3 \approx 5,196$: encadrement vérifié.

2 Norme ou pas ?



- a) Oui : somme de deux semi-normes, et $|x| + 3|y| = 0$ force $x = y = 0$.
- b) Non : $N(1, 1) = 0$ alors que $(1, 1) \neq 0$, la séparation échoue.
- c) Oui : $N(x, y)$ est la norme euclidienne du vecteur $(x, 2y)$, image de (x, y) par une application linéaire injective.
- d) Non : $N(2x, 2y) = 4|xy| = 4N(x, y) \neq 2N(x, y)$ pour $(x, y) = (1, 1)$, l'homogénéité échoue.

3 Boules et aires



- a) $|x - 2,5| < 1,5 \iff 1 < x < 4$, donc $B(2,5; 1,5) =]1, 4[$.
- b) Pour N_∞ : $|x - 1| \leq 3$ et $|y + 2| \leq 3$, c'est le carré $[-2, 4] \times [-5, 1]$, d'aire $6 \times 6 = 36$.
Pour N_1 : $|x - 1| + |y + 2| \leq 3$, c'est un losange de sommets $(4, -2)$, $(-2, -2)$, $(1, 1)$, $(1, -5)$, dont les diagonales mesurent 6 : aire $\frac{6 \times 6}{2} = 18$. Pour N_2 : disque de rayon 3, d'aire 9π .

4 Adhérence, intérieur, frontière



Intérieur : $\overset{\circ}{A} =]-2, -1[\cup]0, 1[$, car 3 est isolé (aucun intervalle autour de 3 n'est dans A) et -2 est au bord. Adhérence : $\overline{A} = [-2, -1] \cup [0, 1] \cup \{3\}$. Frontière : $\overline{A} \setminus \overset{\circ}{A} = \{-2, -1, 0, 1, 3\}$.

$A \neq \overset{\circ}{A}$ donc A n'est pas ouverte ; $A \neq \overline{A}$ donc A n'est pas fermée.

5 Convergence dans le plan



$u_n - \ell = \left(\frac{1}{n}, e^{-n}\right)$. Comme $e^n \geq n$, on a $e^{-n} \leq \frac{1}{n}$, donc $N_\infty(u_n - \ell) = \frac{1}{n} \rightarrow 0$: $u_n \rightarrow \ell$.

La condition $\frac{1}{n} < 0,01$ équivaut à $n > 100$. Le plus petit entier convenable est $N = 101$ (pour $n = 100$, $\frac{1}{100} = 0,01$ n'est pas strictement inférieur).

6 Trois normes de fonctions



$h - k = t^2(1 - t) \geq 0$ sur $[0, 1]$. Sa dérivée $2t - 3t^2 = t(2 - 3t)$ s'annule en $t = \frac{2}{3}$:

$$\|h - k\|_{\infty} = \frac{4}{9} - \frac{8}{27} = \frac{4}{27}.$$

$$\|h - k\|_1 = \int_0^1 (t^2 - t^3) dt = \frac{1}{3} - \frac{1}{4} = \frac{1}{12}.$$

$$\|h - k\|_2^2 = \int_0^1 (t^4 - 2t^5 + t^6) dt = \frac{1}{5} - \frac{1}{3} + \frac{1}{7} = \frac{1}{105}, \text{ donc } \|h - k\|_2 = \frac{1}{\sqrt{105}}.$$

7 Ouvert ou fermé par image réciproque



$A = f^{-1}(]-\infty, 9])$ avec $f(x, y) = x^2 + y^2$ continue : ouvert. $B = g^{-1}(\{1\})$ avec $g(x, y) = xy$ continue : fermé. C est l'intersection de trois images réciproques de fermés $[0, +\infty[$, $[0, +\infty[$ et $]-\infty, 2]$: fermé (et borné, donc compact). $D = h^{-1}(]0, +\infty[)$ avec $h(x, y) = y - x^2$ continue : ouvert.

8 Comparer N_1 , N_2 , N_{∞} sur $\mathbb{R}^2$



$$N_{\infty}^2 = \max(x^2, y^2) \leq x^2 + y^2 = N_2^2, \text{ égalité pour } (1, 0).$$

$$N_1^2 = x^2 + y^2 + 2|xy| \geq N_2^2, \text{ égalité pour } (1, 0).$$

$$\text{Comme } 2|xy| \leq x^2 + y^2, \text{ on a } N_1^2 \leq 2(x^2 + y^2) = 2N_2^2, \text{ égalité pour } (1, 1).$$

$$\text{Enfin } \sqrt{2} N_2 \leq \sqrt{2} \sqrt{2N_{\infty}^2} = 2N_{\infty} \text{ car } x^2 + y^2 \leq 2N_{\infty}^2, \text{ égalité pour } (1, 1).$$

Les constantes 1, $\sqrt{2}$ et 2 sont donc optimales ; les normes sont équivalentes.

9 Norme d'une forme linéaire



a) $|T(f)| \leq \|f\|_{\infty} \int_0^1 t dt = \frac{1}{2} \|f\|_{\infty}$, donc T est continue et $\|T\| \leq \frac{1}{2}$. Pour $f = 1$, $T(f) = \frac{1}{2} = \frac{1}{2} \|f\|_{\infty}$: $\|T\| = \frac{1}{2}$.

b) $|T(f)| \leq \int_0^1 t |f(t)| dt \leq \|f\|_1$, donc T est continue et $\|T\| \leq 1$. Pour $f_n = t^n$:

$T(f_n) = \frac{1}{n+2}$ et $\|f_n\|_1 = \frac{1}{n+1}$, d'où $\frac{|T(f_n)|}{\|f_n\|_1} = \frac{n+1}{n+2} \rightarrow 1$. Donc $\|T\| = 1$, borne non atteinte.

10 La dérivation n'est pas continue



- a) $\|X^n\| = 1$ (maximum atteint en 1) et $D(X^n) = nX^{n-1}$, de norme n .
- b) Si D était continue, il existerait C avec $\|D(P)\| \leq C\|P\|$; avec $P = X^n$ on obtiendrait $n \leq C$ pour tout n , absurde.
- c) $\mathbb{R}_3[X]$ est de dimension finie (4) : toute application linéaire définie sur un tel espace est continue.

11 Quelles parties sont compactes ?



En dimension finie, compact $\iff$ fermé borné. a) Fermé borné : compact. b) Non fermé (les points du cercle unité sont dans l'adhérence) : non compact. c) Cercle : fermé borné, compact. d) Fermé mais non borné (le point $(n, 1/n)$ est de norme tendant vers $+\infty$) : non compact. e) Losange plein : fermé borné, compact. Réponse : a, c et e.

12 Extremum sur un cercle



Le cercle est fermé borné de $\mathbb{R}^2$, donc compact, et f est continue : maximum et minimum existent. Par Cauchy-Schwarz, $|2x + 3y| \leq \sqrt{x^2 + y^2} \sqrt{4 + 9} = \sqrt{13}$, avec égalité si (x, y) est colinéaire à $(2, 3)$. Le maximum vaut $\sqrt{13}$, atteint en $\left(\frac{2}{\sqrt{13}}, \frac{3}{\sqrt{13}}\right)$, et le minimum vaut $-\sqrt{13}$, atteint en $\left(-\frac{2}{\sqrt{13}}, -\frac{3}{\sqrt{13}}\right)$.

13 Un ensemble non connexe par arcs



- a) Supposons un chemin $\gamma = (\gamma_1, \gamma_2) : [0, 1] \rightarrow A$ continu avec $\gamma(0) = (1, 1)$ et $\gamma(1) = (1, -1)$. La fonction continue γ_2 vaut 1 puis -1 : par le théorème des valeurs intermédiaires elle s'annule, et alors $\gamma_1\gamma_2 = 0$, donc $\gamma(t) \notin A$: contradiction.
- b) Soit a, b distincts de l'origine. Si $0 \notin [a, b]$, le segment convient. Sinon 0 est sur la droite (ab) ; on prend c hors de cette droite et le chemin $[a, c]$ puis $[c, b]$, qui évite 0. Si $a = b$, le chemin constant convient.

14 Suite de Cauchy dans $\mathbb{Q}$



a) $x_1 = \frac{1}{2}(1 + 2) = \frac{3}{2}$; $x_2 = \frac{1}{2}\left(\frac{3}{2} + \frac{4}{3}\right) = \frac{17}{12}$; $x_3 = \frac{1}{2}\left(\frac{17}{12} + \frac{24}{17}\right) = \frac{577}{408}$.

b) $x_3^2 - 2 = \frac{577^2 - 2 \times 408^2}{408^2} = \frac{332929 - 332928}{166464} = \frac{1}{166464}$, très proche de 0.

c) Tous les x_n sont rationnels. La suite converge dans $\mathbb{R}$, donc elle est de Cauchy, y compris vue dans $\mathbb{Q}$. Mais sa seule limite possible est $\sqrt{2} \notin \mathbb{Q}$: une suite de Cauchy de $\mathbb{Q}$ ne converge pas dans $\mathbb{Q}$, qui n'est donc pas complet.

15 Ouvert et fermé dans $\mathcal{C}([0, 1])$



a) Pour $f(t) = t^2 + \frac{1}{2}$, $\min f = \frac{1}{2}$. Si $\|g - f\|_\infty < \frac{1}{2}$, alors $g(t) > f(t) - \frac{1}{2} \geq 0$ pour tout t , donc $g \in U$: $B(f, \frac{1}{2}) \subset U$. En général, pour $f \in U$, $m = \min f > 0$ (continuité sur un compact) et $B(f, m) \subset U$: U est ouvert.

b) L'application $\varphi(f) = f(0)$ est 1-lipschitzienne car $|f(0) - g(0)| \leq \|f - g\|_\infty$, donc continue, et $F = \varphi^{-1}(\{0\})$ est fermé.

c) Si $f_n \in V$ converge vers f pour $\|\cdot\|_\infty$, alors pour chaque t , $f_n(t) \rightarrow f(t)$ et $f_n(t) \geq 0$, d'où $f(t) \geq 0$: V est stable par limites, donc fermé. (Remarque : V est fermé mais d'intérieur vide.)

16 Normes non équivalentes



a) $\|f_n\|_\infty = 1$, $\|f_n\|_1 = \frac{1}{n+1}$, $\|f_n\|_2 = \left(\int_0^1 t^{2n} dt\right)^{1/2} = \frac{1}{\sqrt{2n+1}}$.

b) Si $\|f\|_\infty \leq C\|f\|_1$ pour tout f , alors $1 \leq \frac{C}{n+1}$ pour tout n : impossible. De même $\|f\|_\infty \leq C\|f\|_2$ donnerait $\sqrt{2n+1} \leq C$ pour tout n : impossible.

c) $\|f\|_2^2 = \int f^2 \leq \|f\|_\infty^2$, d'où $\|f\|_2 \leq \|f\|_\infty$. Par Cauchy-Schwarz, $\|f\|_1 = \int |f| \cdot 1 \leq (\int f^2)^{1/2} (\int 1)^{1/2} = \|f\|_2$.

17 Norme d'une matrice et groupe linéaire

★★★★

a) $A^T A = \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 2 & 5 \end{pmatrix}$, de polynôme caractéristique $\lambda^2 - 6\lambda + 1$; la plus grande racine est $3 + 2\sqrt{2} = (1 + \sqrt{2})^2$. Donc $\|A\| = 1 + \sqrt{2} \approx 2,414$.

b) Toutes les normes sont équivalentes en dimension finie, et **det** est polynomiale en les coefficients, donc continue. $GL_2(\mathbb{R}) = \det^{-1}(\mathbb{R}^*)$ est l'image réciproque d'un ouvert : c'est un ouvert.

c) Supposons un chemin γ dans $GL_2(\mathbb{R})$ de I_2 à $\text{diag}(1, -1)$. Alors **det** $\circ \gamma$ est continue, vaut 1 puis -1, donc s'annule par le théorème des valeurs intermédiaires : contradiction avec $\gamma(t) \in GL_2$.

18 La boule unité n'est pas compacte

★★★★

a) $\|e_n\| = 1$ et, pour $n \neq m$, $e_n - e_m$ a pour coefficients 1 et -1 : $\|e_n - e_m\| = 1$.

b) Tous les e_n sont dans la boule unité fermée. Mais deux termes distincts sont toujours à distance 1 : aucune sous-suite n'est de Cauchy, donc aucune ne converge. La suite (e_n) n'a pas de sous-suite convergente : la boule unité fermée n'est pas compacte. Cohérent avec le théorème de Riesz, puisque $\mathbb{R}[X]$ est de dimension infinie.

19 Point fixe de $x \mapsto \frac{1}{2} \cos x$

★★★★

a) $|f'(x)| = \frac{1}{2} |\sin x| \leq \frac{1}{2}$: par l'inégalité des accroissements finis f est $\frac{1}{2}$ -lipschitzienne, donc contractante sur $\mathbb{R}$, complet. Le théorème de Banach donne un unique point fixe ℓ (numériquement $\ell \approx 0,4502$).

b) $u_1 = \frac{1}{2} \cos 0 = \frac{1}{2}$, donc $|u_1 - u_0| = \frac{1}{2}$. La majoration $|u_n - \ell| \leq \frac{k^n}{1-k} |u_1 - u_0|$ avec $k = \frac{1}{2}$ donne $2^{-n} \times 2 \times \frac{1}{2} = 2^{-n}$.

c) $2^{-n} \leq 10^{-6} \iff 2^n \geq 10^6$. Comme $2^{19} = 524288 < 10^6 < 2^{20} = 1048576$, il faut $n = 20$ itérations.

20

Distance à une boule



Majoration : $y = x/\|x\|$ est dans la boule (de norme 1) et

$$\|x - y\| = \left\| x \left(1 - \frac{1}{\|x\|} \right) \right\| = \|x\| - 1.$$

Minoration : pour tout y de la boule, $\|x - y\| \geq \|x\| - \|y\| \geq \|x\| - 1$ (inégalité triangulaire renversée). La borne inférieure est donc exactement $\|x\| - 1$, et elle est atteinte.

Application : $N_1(3, 4) = 7$, distance 6 ; $N_2(3, 4) = 5$, distance 4 ; $N_\infty(3, 4) = 4$, distance 3

.

Le livre d'exercices corrigés de maths Maths Spé

Tout le programme en un seul PDF de 133 pages, à imprimer ou à garder sur ta tablette.

[Voir le livre](#)

Zyro te conseille la suite



Exercices de maths

Topologie des espaces vectoriels normés
: exercices de maths Maths Spé



QCM de maths

Topologie des espaces vectoriels normés
: QCM de maths Maths Spé



Contrôles de maths

Topologie des espaces vectoriels normés
: contrôle de maths Maths Spé



Exercices de maths

Calcul différentiel : exercices de maths
Maths Spé



Exercices de maths

Équations différentielles linéaires :
exercices de maths Maths Spé



QCM de maths

Calcul différentiel : QCM de maths Maths
Spé

Zyro vous emmène sur nos sites partenaires

Embarquez pour d'autres planètes du savoir et leurs applis.

Décollage