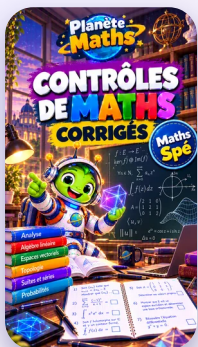


Topologie des espaces vectoriels normés : corrigé du contrôle de maths Maths Spé à télécharger en PDF



Le livre de contrôles corrigés de maths Maths Spé

Tout le programme en un seul PDF de 50 pages, à imprimer ou à garder sur ta tablette.

[Voir le livre](#)

Corrigé du contrôle avec le barème détaillé. Compte tes points et repère ce qu'il faut revoir.

Durée conseillée : 45 minutes. Barème sur 20 points. Calculatrice autorisée seulement quand l'énoncé le précise.

1 Une norme sur $\mathbb{R}^2$

/ 4 pts

1) Homogénéité : $N(\lambda(x, y)) = |\lambda| N(x, y)$. Inégalité triangulaire : somme de deux valeurs absolues de formes linéaires. Séparation : $N = 0$ donne $y = 0$ puis $2x = 0$, donc $(x, y) = 0$. (2 pts)

2) Avec $u = 2x + y$ et $v = y$, la condition devient $|u| + |v| \leq 1$, de sommets $(\pm 1, 0)$, $(0, \pm 1)$ en (u, v) . Comme $x = \frac{u-v}{2}$, les sommets en (x, y) sont $(\frac{1}{2}, 0)$, $(-\frac{1}{2}, 0)$, $(-\frac{1}{2}, 1)$, $(\frac{1}{2}, -1)$. L'aire vaut $\frac{2}{2} = 1$ (le losange $|u| + |v| \leq 1$ d'aire 2, divisé par le déterminant 2 du changement de variable). (1 pt)

3) $|y| \leq N$ et $2|x| \leq |2x + y| + |y| = N$, donc $N_\infty \leq N$, égalité pour $(-1, 2)$ ($N = 0 + 2 = 2 = N_\infty$). Et $|2x + y| \leq 3N_\infty$, $|y| \leq N_\infty$, donc $N \leq 4N_\infty$, égalité pour $(1, 1)$ ($N = 3 + 1 = 4$). (1 pt)

2 Une suite particulière

/ 4 pts

1) Aucun intervalle ouvert non vide ne tient dans A qui est dénombrable (ou : autour de $\frac{1}{n}$ il y a des réels qui ne sont pas de la forme $\frac{1}{m}$). Donc $\mathring{A} = \emptyset$. (1 pt)

2) $\frac{1}{n} \rightarrow 0$ avec $\frac{1}{n} \in A$ donc $0 \in \overline{A}$. Les points $\frac{1}{n}$ sont dans A . Un réel $x \notin A \cup \{0\}$ n'est pas limite d'une suite de A : une suite de A qui converge est soit stationnaire (limite dans A) soit de dénominateurs tendant vers $+\infty$ (limite 0). Donc $\overline{A} = A \cup \{0\}$. (2 pts)

3) $A \neq \overline{A}$: A n'est pas fermée. $A \cup \{0\} = \overline{A}$ est fermé et contenu dans $[0, 1]$, donc borné : compact en dimension finie. (1 pt)

3**Extrema sous contraintes****/ 3 pts**

- 1) K est l'intersection de deux images réciproques de fermés par des fonctions continues : fermé. Il est inclus dans la boule de rayon 2 : borné. En dimension finie, K est compact. (1 pt)
- 2) g est continue sur le compact K non vide $((1, 0) \in K)$: extrema atteints. Le maximum : par Cauchy-Schwarz $x + y \leq \sqrt{2}\sqrt{x^2 + y^2} \leq 2\sqrt{2}$, atteint en $(\sqrt{2}, \sqrt{2})$ qui est dans K : maximum $2\sqrt{2}$. (1 pt) Le minimum : sur K , $g \geq 1$, et $g(1, 0) = 1$ avec $(1, 0) \in K$: minimum 1. (1 pt)

4**Deux normes non équivalentes****/ 3 pts**

- 1) $g_n(0) = 1$ et $0 \leq g_n \leq 1$: $\|g_n\|_\infty = 1$. La courbe de g_n est un triangle de base $\frac{1}{n}$ et de hauteur 1 : $\|g_n\|_1 = \frac{1}{2} \times \frac{1}{n} \times 1 = \frac{1}{2n}$. (2 pts)
- 2) Si $\|f\|_\infty \leq C\|f\|_1$ pour tout f , alors $1 \leq \frac{C}{2n}$, soit $n \leq \frac{C}{2}$ pour tout n : absurde. (1 pt)

5**Évaluation en zéro****/ 3 pts**

- 1) $|T(f)| = |f(0)| \leq \|f\|_\infty$, donc T est continue de norme ≤ 1 ; pour $f = 1$ on a $T(f) = 1 = \|f\|_\infty$, donc $\|T\| = 1$. (1 pt)
- 2) $T(h_n) = 1$ et $\|h_n\|_1 = \int_0^1 (1-t)^n dt = \frac{1}{n+1}$. Donc $\frac{|T(h_n)|}{\|h_n\|_1} = n+1$ n'est pas borné : aucune constante C ne vérifie $|T(f)| \leq C\|f\|_1$, T n'est pas continue pour $\|\cdot\|_1$. (2 pts)

6

Un point fixe à approcher

/ 3 pts

1) $|f'(x)| = \frac{1}{4}|\cos x| \leq \frac{1}{4}$: f est $\frac{1}{4}$ -lipschitzienne donc contractante sur $\mathbb{R}$ complet. Le théorème de Banach donne un unique point fixe. (1 pt)

2) $u_1 - u_0 = \frac{1}{4}\sin 2 \approx 0,2273$. La majoration est

$|u_n - \ell| \leq \frac{(1/4)^n}{3/4} \times 0,2273 \approx 0,3031 \times 4^{-n}$. Pour $n = 12 : \approx 1,8 \times 10^{-8}$, insuffisant ;

pour $n = 13 : \approx 4,5 \times 10^{-9} \leq 10^{-8}$. Le plus petit entier est $n = 13$. (2 pts)

Le livre de contrôles corrigés de maths Maths Spé

Tout le programme en un seul PDF de 50 pages, à imprimer ou à garder sur ta tablette.

[Voir le livre](#)


Zyro te conseille la suite



Contrôles de maths

Topologie des espaces vectoriels normés
: contrôle de maths Maths Spé



Cours de maths

Topologie des espaces vectoriels normés
: cours de maths Maths Spé

 QCM de maths

Topologie des espaces vectoriels normés
: QCM de maths Maths Spé

 Contrôles de maths

Calcul différentiel : contrôle de maths
Maths Spé

 Contrôles de maths

Équations différentielles linéaires :
contrôle de maths Maths Spé

 Cours de maths

Calcul différentiel : cours de maths
Maths Spé

Zyro vous emmène sur nos sites partenaires

Embarquez pour d'autres planètes du savoir et leurs applis.

Décollage