

Suites et séries de fonctions : exercices de maths Maths Spé à télécharger en PDF



Le livre d'exercices corrigés de maths Maths Spé

Tout le programme en un seul PDF de 133 pages, à imprimer ou à garder sur ta tablette.

[Voir le livre](#)

21 exercices classés par difficulté (★ facile, ★★ moyen, ★★★ difficile). Cherche d'abord sans regarder le corrigé !

1 Limites simples



Déterminer la limite simple, si elle existe, de chaque suite :

a. $f_n(x) = \frac{x}{n+1}$ sur $\mathbb{R}$;

b. $g_n(x) = \left(1 + \frac{x}{n}\right)^n$ sur $\mathbb{R}$;

c. $h_n(x) = e^{-nx}$ sur $[0, +\infty[$;

d. $k_n(x) = \frac{\sin x}{\sqrt{n}}$ sur $\mathbb{R}$.

2 Norme uniforme à calculer



On pose $f_n(x) = \frac{x}{n+1}$. Calculer $\|f_n\|_\infty$ sur $[0, 3]$, puis dire si la convergence vers la fonction nulle est uniforme sur $[0, 3]$ et sur $\mathbb{R}$.

3 Vrai ou faux ?



Dire si chaque affirmation est vraie ou fausse, avec une justification courte.

- a. La limite simple d'une suite de fonctions continues est toujours continue.
- b. Une convergence uniforme sur I est une convergence simple sur I .
- c. Une série qui converge normalement converge uniformément.

4 Normale ou pas ?



Les séries suivantes convergent-elles normalement sur $\mathbb{R}$?

- a. $\sum_{n \geq 1} \frac{\cos(nx)}{n^2}$;
- b. $\sum_{n \geq 1} \frac{\sin(nx)}{n}$.

5 Une série géométrique



Montrer que $\sum_{n \geq 0} x^n$ converge normalement sur $[-\frac{1}{2}, \frac{1}{2}]$, puis calculer la somme en $x = \frac{1}{3}$ et en $x = -\frac{1}{2}$.

6 Combien de termes ?



On pose $f_n(x) = x^n$ sur $[0, \frac{1}{2}]$. Calculer $\|f_n\|_\infty$, puis déterminer le plus petit entier n tel que $\|f_n\|_\infty < 10^{-3}$.

7 Intégrale et limite



Pour $f_n(x) = x^n$ sur $[0, 1]$, calculer $\int_0^1 f_n$, puis comparer avec l'intégrale de la limite simple.

8 Un supremum à étudier



Soit $f_n(x) = \frac{x}{n + x^2}$ sur $\mathbb{R}$. Déterminer la limite simple, calculer $\|f_n\|_\infty$ et conclure.

9 Une bosse qui se rétrécit



Soit $f_n(x) = \frac{nx}{1 + n^2x^2}$ sur $[0, +\infty[$.

- Déterminer la limite simple.
- Calculer $f_n(1/n)$. La convergence est-elle uniforme sur $[0, +\infty[$?
- Montrer qu'elle est uniforme sur $[a, +\infty[$ pour tout $a > 0$.

10 Le produit x puissance n par 1 moins x



Soit $f_n(x) = x^n(1 - x)$ sur $[0, 1]$. Montrer que (f_n) converge uniformément vers 0 et calculer $\|f_n\|_\infty$.

11 Une limite qui casse



Soit $f_n(x) = \frac{x^n}{1 + x^n}$ sur $[0, 1]$.

- Déterminer la limite simple f .
- En déduire que la convergence n'est pas uniforme sur $[0, 1]$.
- Montrer qu'elle est uniforme sur $[0, \frac{2}{3}]$.

12 Un cousin de la somme de Bâle



On pose $S(x) = \sum_{n \geq 1} \frac{x^n}{n^2}$ sur $[-1, 1]$. On admet que $\sum_{n \geq 1} \frac{1}{n^2} = \frac{\pi^2}{6}$.

- Montrer que S est continue sur $[-1, 1]$.
- Calculer $S(1)$.
- Calculer $S(1) + S(-1)$ puis $S(-1)$.

13 Intégrer terme à terme



Justifier que $\int_0^{1/2} \frac{dx}{1-x} = \sum_{n=0}^{+\infty} \int_0^{1/2} x^n dx$ et en déduire la somme $\sum_{k \geq 1} \frac{1}{k 2^k}$.

14 Racine régularisée



Soit $f_n(x) = \sqrt{x^2 + \frac{1}{n^2}}$ sur $\mathbb{R}$.

- Montrer que f_n est de classe C^1 et calculer f'_n .
- Montrer que $0 \leq f_n(x) - |x| \leq \frac{1}{n}$. En déduire la limite uniforme de (f_n) .
- Cette limite est-elle dérivable en 0 ? Que dit-on de (f'_n) ?

15 Une intégrale qui s'échappe



Soit $f_n(x) = n^2 x e^{-nx}$ sur $[0, 1]$.

- Déterminer la limite simple.
- Calculer $\int_0^1 f_n(x) dx$ à l'aide d'une primitive de $x \mapsto n^2 x e^{-nx}$ et sa limite.
- Calculer $\|f_n\|_\infty$ et conclure sur l'uniformité.

16 Une série trigonométrique de classe C1

★★★

Soit $S(x) = \sum_{n \geq 1} \frac{\sin(nx)}{n^3}$.

- Montrer que S est de classe C^1 sur $\mathbb{R}$ et donner S' .
- Calculer $S'(0)$ (on admet $\sum 1/n^2 = \pi^2/6$).
- Calculer $S'(\pi)$ (utiliser l'exercice sur $\sum x^n/n^2$).

17 Une somme qui explose en zéro

★★★

Soit $S(x) = \sum_{n \geq 1} \frac{e^{-nx}}{n}$ pour $x > 0$.

- Montrer la convergence normale sur $[a, +\infty[$ pour tout $a > 0$, puis la continuité de S sur $]0, +\infty[$.
- La convergence est-elle normale sur $]0, +\infty[$?
- Montrer que S est C^1 et que $S'(x) = -\frac{1}{e^x - 1}$.
- En déduire $S(x) = -\ln(1 - e^{-x})$ et calculer $S(\ln 2)$.

18 Weierstrass et les moments

★★★

Soit f continue sur $[0, 1]$ telle que $\int_0^1 f(t) t^k dt = 0$ pour tout entier $k \geq 0$. Montrer que $f = 0$.

19 Polynômes de Bernstein



Soit $f(x) = \left|x - \frac{1}{2}\right|$ sur $[0, 1]$ et $B_n(f)(x) = \sum_{k=0}^n \binom{n}{k} f\left(\frac{k}{n}\right) x^k (1-x)^{n-k}$.

- Calculer $B_2(f)$.
- Déterminer $\|B_2(f) - f\|_\infty$.
- Calculer $B_4(f)\left(\frac{1}{2}\right)$ et comparer avec $f\left(\frac{1}{2}\right)$.

20 Approcher une racine par des polynômes



On définit $f_0 = 0$ et, pour $x \in [0, 1]$, $f_{n+1}(x) = f_n(x) + \frac{x - f_n(x)^2}{2}$.

- Calculer f_1 et f_2 .
- Montrer par récurrence que $0 \leq f_n(x) \leq \sqrt{x}$ et que
$$\sqrt{x} - f_{n+1}(x) = (\sqrt{x} - f_n(x)) \left(1 - \frac{\sqrt{x} + f_n(x)}{2}\right).$$
- En déduire $\sqrt{x} - f_n(x) \leq \sqrt{x} \left(1 - \frac{\sqrt{x}}{2}\right)^n$, puis $\|\sqrt{\cdot} - f_n\|_\infty \leq \frac{2}{en}$.

21 Une bosse d'aire qui disparaît



Soit $f_n(x) = nx(1-x)^n$ sur $[0, 1]$.

- Déterminer la limite simple.
- Calculer $\|f_n\|_\infty$ et sa limite.

- Calculer $\int_0^1 f_n$ (on pourra utiliser que $\int_0^1 x(1-x)^n dx = \frac{1}{(n+1)(n+2)}$) et conclure.

Le livre d'exercices corrigés de maths Maths Spé

Tout le programme en un seul PDF de 133 pages, à imprimer ou à garder sur ta tablette.

[Voir le livre](#)

Zyro te conseille la suite

Exercices corrigés de maths

Suites et séries de fonctions : exercices corrigés de maths Maths Spé

Cours de maths

Suites et séries de fonctions : cours de maths Maths Spé

QCM de maths

Suites et séries de fonctions : QCM de maths Maths Spé

Exercices corrigés de maths

Séries entières : exercices corrigés de maths Maths Spé

✓ **Exercices corrigés de maths**

Intégration sur un intervalle quelconque :
exercices corrigés de maths Maths Spé

■ **Cours de maths**

Séries entières : cours de maths Maths
Spé

Zyro vous emmène sur nos sites partenaires

Embarquez pour d'autres planètes du savoir et leurs applis.

Décollage