

Suites et séries de fonctions : exercices de maths Licence L2 à télécharger en PDF



Le livre d'exercices corrigés de maths Licence L2

Tout le programme en un seul PDF de 128 pages, à imprimer ou à garder sur ta tablette.

[Voir le livre](#)

22 exercices classés par difficulté (★ facile, ★★ moyen, ★★★ difficile). Cherche d'abord sans regarder le corrigé !

1 Fonction qui se raidit

★ ★ ★

Pour $x \geq 0$, on pose $f_n(x) = \frac{nx}{1 + nx}$.

- Déterminer la limite simple f de (f_n) sur $[0, +\infty[$.
- La convergence est-elle uniforme sur $[0, +\infty[$?
- Montrer qu'elle l'est sur $[\frac{1}{2}, +\infty[$.

2 Exponentielle décroissante



Sur $]0, +\infty[$, on pose $g_n(x) = e^{-nx}$.

- Quelle est la limite simple ?
- Montrer que la convergence n'est pas uniforme sur $]0, +\infty[$ (on pourra prendre $x_n = \ln 2/n$).
- Sur $[\frac{1}{5}, +\infty[$, à partir de quel rang a-t-on $\|g_n\|_\infty \leq 10^{-2}$?

3 Un rang explicite



Sur $[0; 0,8]$, $f_n(x) = x^n$. Déterminer le plus petit entier N tel que, pour $n \geq N$, $|f_n(x)| \leq 10^{-3}$ pour tous les x de $[0; 0,8]$.

4 Vrai ou faux ?



Dire si chaque affirmation est vraie ou fausse, en justifiant.

- Une suite de fonctions qui converge uniformément sur I converge simplement sur I .
- La limite simple d'une suite de fonctions continues est continue.
- Si $\|f_n - f\|_\infty \rightarrow 0$, alors $f_n(x_0) \rightarrow f(x_0)$ pour tout $x_0 \in I$.

5 Un sinus qui s'étire



On pose $h_n(x) = \sin\left(\frac{x}{n}\right)$.

- Montrer que (h_n) converge uniformément vers 0 sur $[0, 10]$.
- Montrer qu'elle ne converge pas uniformément vers 0 sur $\mathbb{R}$.

6 Série de cosinus



Soit $S(x) = \sum_{n \geq 1} \frac{\cos(nx)}{n^3}$.

- Montrer que la série converge normalement sur $\mathbb{R}$ et que S est continue.
- Montrer que $|S(x) - S_N(x)| \leq \frac{1}{2N^2}$, où S_N est la somme partielle jusqu'à l'indice N .
- Quel N garantit une erreur d'au plus 10^{-3} ?

7 Série entière sur le segment



Soit $S(x) = \sum_{n \geq 1} \frac{x^n}{n^2}$ sur $[-1, 1]$.

- Montrer que la convergence est normale sur $[-1, 1]$.
- En déduire que S est continue sur $[-1, 1]$, puis calculer $S(0)$ et encadrer S .

8 Un pic qui s'amincit



Sur $\mathbb{R}$, $f_n(x) = \frac{nx}{1 + n^2 x^2}$.

- Déterminer la limite simple.
- Calculer $\|f_n\|_\infty$ et conclure sur la convergence uniforme sur $\mathbb{R}$.
- Montrer la convergence uniforme sur $[a, +\infty[$ pour tout $a > 0$.

9

Borne par étude de fonction

Sur $[0, 1]$, $f_n(x) = x^n(1 - x)$.

- Étudier les variations de f_n et calculer $\|f_n\|_\infty$.
- Montrer que $\|f_n\|_\infty \leq \frac{1}{n+1}$. Conclure.
- Donner la valeur de $\|f_3\|_\infty$.

10

Dérivées qui divergent

Soit $f_n(x) = \frac{\sin(nx)}{n}$ sur $\mathbb{R}$.

- Montrer que (f_n) converge uniformément vers 0.
- Étudier la suite $(f'_n(x))$ en $x = 0$ et en $x = \pi$.
- Quelle leçon en tirer sur le théorème de dérivation ?

11

Intégrale qui ne passe pas à la limite

Sur $[0, 1]$, $f_n(x) = nx(1 - x^2)^n$.

- Montrer que (f_n) converge simplement vers 0.
- Calculer $I_n = \int_0^1 f_n(x) dx$ (poser $u = 1 - x^2$) et sa limite.
- Que peut-on conclure sur la convergence uniforme ?

12 Alternée non normale



Soit $S(x) = \sum_{n \geq 1} \frac{(-1)^n}{n + x^2}$ sur $\mathbb{R}$.

- La série converge-t-elle normalement sur $\mathbb{R}$?
- Montrer qu'elle converge uniformément sur $\mathbb{R}$ (majorer le reste).
- Que dire de la continuité de S ?

13 Sommes partielles de l'exponentielle



Sur $[0, 1]$, $P_n(x) = \sum_{k=0}^n \frac{x^k}{k!}$ et $f(x) = e^x$.

- Montrer que (P_n) converge uniformément vers f à l'aide du théorème de Dini.
- Retrouver ce résultat avec une majoration explicite du reste $\|f - P_n\|_\infty \leq \frac{e}{(n+1)!}$ (formule de Taylor-Lagrange).
- Donner le plus petit n tel que $\frac{e}{(n+1)!} \leq 10^{-4}$.

14 Une intégrale de série



Justifier puis calculer $\int_0^{1/2} \left(\sum_{n \geq 1} x^n \right) dx$ en intégrant terme à terme, puis retrouver le résultat avec la somme de la série géométrique.

15 Somme d'une série de fractions



On pose $S(x) = \sum_{n \geq 1} \frac{1}{n^2 + x^2}$ sur $\mathbb{R}$.

- Montrer que la série converge normalement sur $\mathbb{R}$; en déduire que S est continue.
- Montrer que S est paire et décroissante sur $[0, +\infty[$.
- Calculer $S(0)$ et en déduire un encadrement de S .

16 Convergence par morceaux



Sur $[0, 2]$, $f_n(x) = \frac{x^n}{1+x^n}$.

- Déterminer la limite simple f .
- Montrer que la convergence n'est pas uniforme sur $[0, 2]$.
- Montrer qu'elle est uniforme sur $[0, \frac{3}{4}]$ et sur $[\frac{3}{2}, 2]$.

17 Une série dérivable



Soit $S(x) = \sum_{n \geq 1} \frac{\sin(nx)}{n^3}$.

- Montrer que S est définie et continue sur $\mathbb{R}$.
- Montrer que S est de classe C^1 et donner $S'(x)$ sous forme de série.
- Calculer $S'(0)$.

18 Série sans convergence uniforme



Pour $x \geq 0$, $u_n(x) = xe^{-nx}$, $n \geq 1$.

- Calculer $\|u_n\|_\infty$. La série $\sum u_n$ converge-t-elle normalement sur $[0, +\infty[$?
- Calculer la somme $S(x)$ pour $x > 0$, puis $S(0)$.
- Calculer le reste $R_n(x)$ et en déduire que la convergence n'est pas uniforme sur $[0, +\infty[$.
- Montrer qu'elle l'est sur $[a, +\infty[$ pour tout $a > 0$.

19 Bernstein à la main



Pour une fonction f sur $[0, 1]$, $B_n(f)(x) = \sum_{k=0}^n f(k/n) \binom{n}{k} x^k (1-x)^{n-k}$.

- Calculer $B_2(f)$ pour $f(x) = x^2$ directement avec la formule.
- On admet $B_n(f)(x) = x^2 + \frac{x(1-x)}{n}$ pour $f(x) = x^2$. Calculer $\|B_n(f) - f\|_\infty$.
- Combien de degrés n suffisent pour une erreur d'au plus **0,01** ?

20 Moments nuls



Soit f continue sur $[0, 1]$ telle que $\int_0^1 f(t) t^k dt = 0$ pour tout entier $k \geq 0$. Montrer que $f = 0$.

21 Les hypothèses de Dini



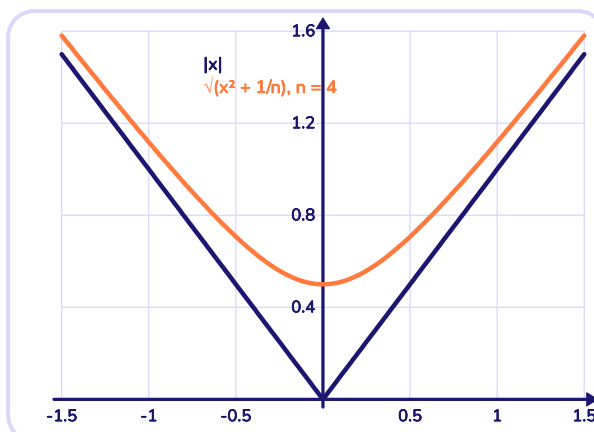
Montrer par des exemples que l'on ne peut supprimer aucune des hypothèses du théorème de Dini :

- limite continue, suite monotone, mais intervalle non compact : $f_n(x) = \frac{1}{1+nx}$ sur $]0, 1]$;
- compact, limite continue, mais suite non monotone : $g_n(x) = nxe^{-nx}$ sur $[0, 1]$;
- compact, suite monotone, mais limite non continue : x^n sur $[0, 1]$.

22 Une limite non dérivable



Pour $x \in \mathbb{R}$, on pose $f_n(x) = \sqrt{x^2 + \frac{1}{n}}$ (figure : $n = 4$).



- Montrer que f_n est C^1 et que (f_n) converge uniformément sur $\mathbb{R}$ vers $f(x) = |x|$.
- La limite est-elle dérivable ? Expliquer pourquoi le théorème de dérivation ne s'applique pas.

Le livre d'exercices corrigés de maths Licence L2

Tout le programme en un seul PDF de 128 pages, à imprimer ou à garder sur ta tablette.

Voir le livre



Entraîne-toi : défi express de Licence L2

Changer de niveau

Niveau : Licence L2

6 questions au hasard, correction tout de suite.



Lancer le défi

 Zyro te conseille la suite

 Exercices corrigés de maths

Suites et séries de fonctions : exercices corrigés de maths Licence L2

 Cours de maths

Suites et séries de fonctions : cours de maths Licence L2

 QCM de maths

Suites et séries de fonctions : QCM de maths Licence L2

 Exercices corrigés de maths

Séries numériques : exercices corrigés de maths Licence L2

 Exercices corrigés de maths

 Cours de maths

Séries entières : exercices corrigés de
maths Licence L2

Séries numériques : cours de maths
Licence L2

Zyro vous emmène sur nos sites partenaires

Embarquez pour d'autres planètes du savoir et leurs applis.

Décollage