

Suites et séries de fonctions : cours de maths Maths Spé à télécharger en PDF



Le livre de cours de maths Maths Spé

Tout le programme en un seul PDF de 103 pages, à imprimer ou à garder sur ta tablette.

[Voir le livre](#)

Une suite de nombres converge ou non ; une suite de **fonctions** peut converger de plusieurs façons, et la manière dont elle converge décide de ce qui survit à la limite : continuité, intégrale, dérivée. Ce chapitre apprend à distinguer la convergence simple, la convergence uniforme et, pour les séries, la convergence normale, puis à s'en servir pour permuter limite, somme, intégrale et dérivation. Il se termine par l'approximation d'une fonction continue par des polynômes.

1. Convergence simple

D Convergence simple

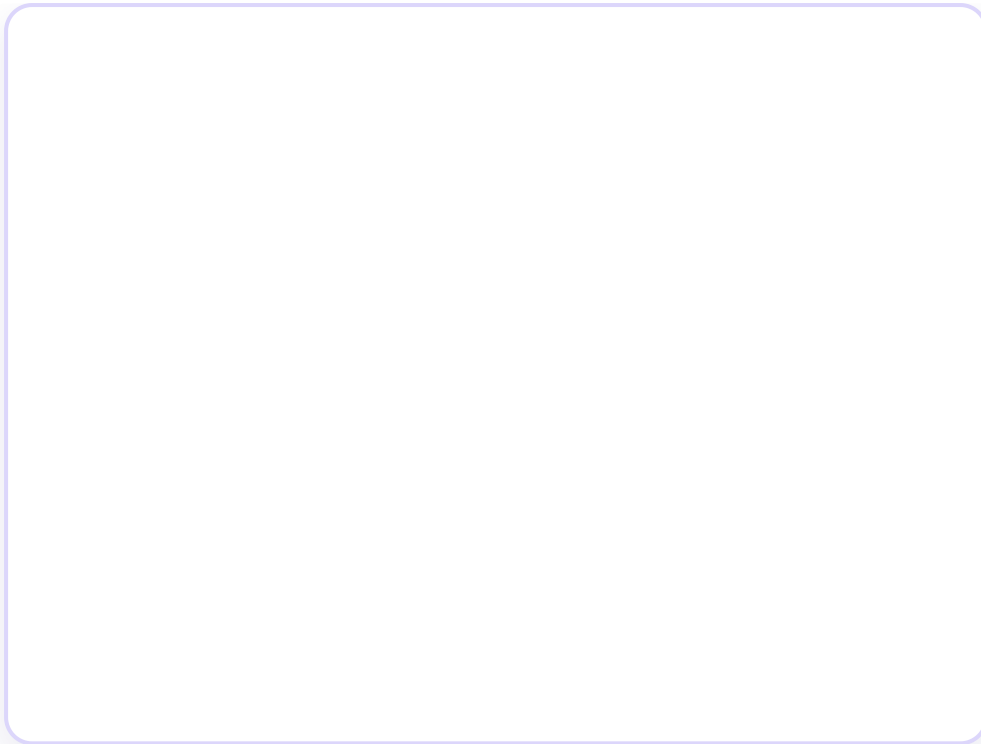
Soit (f_n) une suite de fonctions définies sur un ensemble I et à valeurs réelles ou complexes. On dit que (f_n) **converge simplement** vers f sur I si, pour **chaque** $x \in I$, la suite numérique $(f_n(x))$ converge vers $f(x)$:

$$\forall x \in I, \forall \varepsilon > 0, \exists N, \forall n \geq N, |f_n(x) - f(x)| \leq \varepsilon.$$

Le rang N peut ici dépendre de x : on regarde les points un par un. La limite simple, quand elle existe, est unique.

E Exemple 1 : les puissances

Pour $f_n(x) = x^n$ sur $[0, 1]$: si $0 \leq x < 1$, $x^n \rightarrow 0$; si $x = 1$, $1^n = 1$. La limite simple est donc la fonction f valant 0 sur $[0, 1[$ et 1 en 1 . Les f_n sont continues, mais **la limite ne l'est pas**.



Suites séries fonctions Maths Spé : graphes de x puissance n sur $[0,1]$ pour $n = 1, 2, 5$ et 15 , qui se collent à l'axe des abscisses puis remontent brutalement vers 1 en $x = 1$

E

Exemple 2 : une limite exponentielle

Pour $g_n(x) = \left(1 + \frac{x}{n}\right)^n$ sur $\mathbb{R}$, on écrit $g_n(x) = \exp(n \ln(1 + x/n))$ et $n \ln(1 + x/n) \rightarrow x$. La limite simple est $x \mapsto e^x$.

2. Convergence uniforme

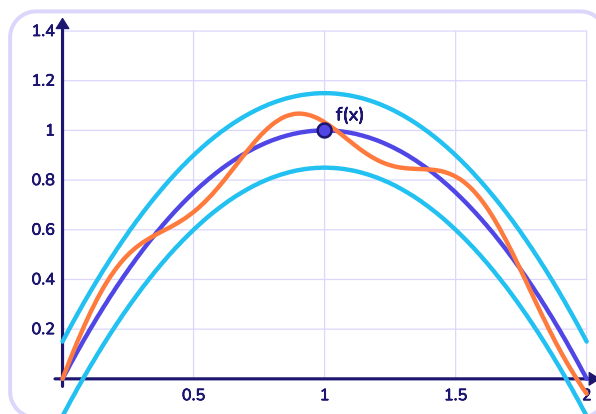
D Convergence uniforme

Soit f_n et f bornées (ou au moins avec $f_n - f$ bornée) sur I . On note $\|f_n - f\|_{\infty, I} = \sup_{x \in I} |f_n(x) - f(x)|$. La suite (f_n) converge uniformément vers f sur I si

$$\|f_n - f\|_{\infty, I} \xrightarrow{n \rightarrow +\infty} 0,$$

c'est-à-dire : $\forall \varepsilon > 0, \exists N, \forall n \geq N, \forall x \in I, |f_n(x) - f(x)| \leq \varepsilon$.

Cette fois, le rang N ne dépend **pas** de x : à partir de N , le graphe de f_n tout entier est contenu dans un « tube » de largeur 2ε autour du graphe de f .



P Propriétés

La convergence uniforme sur I entraîne la convergence simple sur I , vers la même limite. La réciproque est fautive (exemple 1 : la limite de x^n n'est pas continue). La convergence uniforme sur I entraîne celle sur toute partie de I .

M

Méthode : étudier la convergence uniforme

1. Chercher la limite simple f (on fixe x et on fait tendre n vers l'infini).
2. Calculer ou majorer $\|f_n - f\|_\infty$: étude des variations de $f_n - f$, ou majoration simple indépendante de x .
3. Si cette quantité tend vers 0, la convergence est uniforme. Sinon, exhiber des points x_n tels que $|f_n(x_n) - f(x_n)|$ ne tend pas vers 0.

E

Exemple 3 : une convergence uniforme sur $\mathbb{R}$

Soit $g_n(x) = \frac{x}{1+nx^2}$. La limite simple est 0. On dérive : $g'_n(x) = \frac{1-nx^2}{(1+nx^2)^2}$, qui s'annule en $x = \pm 1/\sqrt{n}$. La fonction g_n est impaire, donc

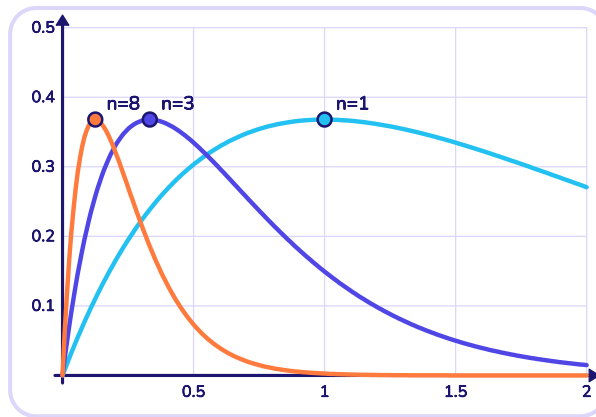
$$\|g_n\|_\infty = g_n\left(\frac{1}{\sqrt{n}}\right) = \frac{1}{2\sqrt{n}} \rightarrow 0. \text{ La convergence est uniforme sur } \mathbb{R}.$$

E

Exemple 4 : une bosse qui ne s'écrase pas

Soit $h_n(x) = nxe^{-nx}$ sur $[0, +\infty[$. La limite simple est 0 (pour $x > 0$, e^{-nx} l'emporte sur n). Or h_n atteint son maximum en $x = 1/n$, où $h_n(1/n) = e^{-1}$. Donc $\|h_n\|_\infty = e^{-1}$ ne tend pas vers 0 : la convergence n'est **pas** uniforme sur $[0, +\infty[$. Elle l'est sur $[a, +\infty[$ pour tout $a > 0$, car, dès que $1/n \leq a$,

$$\sup_{[a, +\infty[} h_n = h_n(a) = nae^{-na} \rightarrow 0.$$



Erreur classique

« Les f_n tendent vers 0 en chaque point, donc uniformément » est faux. Pour x^n , on a même $\sup_{[0,1[} x^n = 1$ pour tout n : en prenant $x_n = 2^{-1/n}$, on trouve $x_n^n = \frac{1}{2}$ alors que la limite vaut 0. En revanche, sur $[0, a]$ avec $a < 1$, $\|x^n\|_\infty = a^n \rightarrow 0$: la convergence est uniforme sur tout segment de $[0, 1[$.

3. Séries de fonctions : convergence simple, uniforme, normale

Pour une série $\sum u_n$ de fonctions, on note $S_N = \sum_{n=0}^N u_n$ la somme partielle et, lorsque la série converge simplement, $R_N = S - S_N = \sum_{n>N} u_n$ le reste. La série converge **simplement** si $S_N(x)$ converge pour tout x , **uniformément** si $\|R_N\|_\infty \rightarrow 0$.



Convergence normale

La série $\sum u_n$ converge **normalement** sur I si les u_n sont bornées sur I et si la série numérique $\sum \|u_n\|_{\infty, I}$ converge.

P

Normale $\Rightarrow$ uniforme

Si $\sum u_n$ converge normalement sur I , alors elle converge absolument en chaque point, **uniformément** sur I , et $\|R_N\|_\infty \leq \sum_{n>N} \|u_n\|_\infty$. La réciproque est fautive : les fonctions constantes $u_n = \frac{(-1)^n}{n}$ donnent une série uniformément convergente (c'est une série numérique alternée) mais $\sum \|u_n\|_\infty = \sum \frac{1}{n}$ diverge.

E

Exemple 5

La série $\sum_{n \geq 1} \frac{x^n}{n^2}$ converge normalement sur $[-1, 1]$: $\|u_n\|_\infty = \frac{1}{n^2}$ et $\sum \frac{1}{n^2}$ converge. La série géométrique $\sum x^n$ converge normalement sur $[-a, a]$ pour tout $a \in [0, 1[$ ($\|u_n\|_\infty = a^n$), mais pas sur $] -1, 1[$ où $\|u_n\|_\infty = 1$, et pas même uniformément : $\|R_N\|_\infty = \sup \frac{|x|^{N+1}}{1-x}$ est infini.

4. Continuité de la limite

P

Théorème (continuité)

Si les f_n sont continues sur I et convergent uniformément vers f sur I , alors f est continue sur I . Il suffit que la convergence soit uniforme sur tout segment inclus dans I .

Idée de la preuve : pour $x_0 \in I$,

$|f(x) - f(x_0)| \leq |f(x) - f_n(x)| + |f_n(x) - f_n(x_0)| + |f_n(x_0) - f(x_0)|$; les deux termes extrêmes sont inférieurs à $\varepsilon/3$ pour n grand (uniformité), et le terme central l'est pour x proche de x_0 (continuité de f_n).

Version séries : si les u_n sont continues et $\sum u_n$ converge uniformément (par exemple normalement) sur I , la somme S est continue sur I . Pour $\sum x^n/n^2$, la somme est continue sur $[-1, 1]$, y compris en ± 1 .

Usage contraposé : si les f_n sont continues et la limite simple ne l'est pas, la convergence n'est pas uniforme. C'est la façon la plus rapide de réfuter l'uniformité, comme pour x^n sur $[0, 1]$.

5. Intersion limite et intégrale

P Théorème (intégration sur un segment)

Si les f_n sont continues sur $[a, b]$ et convergent uniformément vers f sur $[a, b]$, alors

$$\lim_{n \rightarrow +\infty} \int_a^b f_n(t) dt = \int_a^b f(t) dt.$$

En effet, $\left| \int_a^b f_n - \int_a^b f \right| \leq (b-a) \|f_n - f\|_\infty \rightarrow 0$. Pour les séries : si $\sum u_n$ converge uniformément sur $[a, b]$ (les u_n continues), alors $\int_a^b \sum_n u_n = \sum_n \int_a^b u_n$: on intègre **terme à terme**.

E Exemple 6 : un logarithme en série

La série $\sum_{n \geq 0} x^n$ converge normalement sur $[0, \frac{1}{2}]$ de somme $\frac{1}{1-x}$. On intègre terme à terme :

$$\int_0^{1/2} \frac{dx}{1-x} = \sum_{n=0}^{+\infty} \int_0^{1/2} x^n dx = \sum_{n=0}^{+\infty} \frac{(1/2)^{n+1}}{n+1}.$$

Le membre de gauche vaut $\ln 2$. Ainsi $\sum_{k=1}^{+\infty} \frac{1}{k 2^k} = \ln 2$.



Sans uniformité, tout peut arriver

Soit $f_n(x) = 2nxe^{-nx^2}$ sur $[0, 1]$. La limite simple est 0, donc $\int_0^1 \lim f_n = 0$.

Pourtant $\int_0^1 f_n = 1 - e^{-n} \rightarrow 1$. La convergence n'est pas uniforme (le maximum, atteint en $1/\sqrt{2n}$, tend vers l'infini), et les deux opérations ne commutent pas.

6. Dérivation terme à terme



Théorème (classe C^1)

Soit I un intervalle et (f_n) une suite de fonctions de classe C^1 sur I . Si (f_n) converge simplement vers f sur I et si (f'_n) converge uniformément vers g sur tout segment de I , alors f est de classe C^1 sur I et $f' = g$. De plus, la convergence de (f_n) vers f est uniforme sur tout segment.

Version séries : si $\sum u_n$ converge simplement, avec u_n de classe C^1 , et si $\sum u'_n$ converge uniformément sur tout segment, alors S est de classe C^1 et $S' = \sum u'_n$.



Exemple 7

Soit $S(x) = \sum_{n \geq 1} \frac{\sin(nx)}{n^3}$. On a $\|u_n\|_\infty = \frac{1}{n^3}$ et $u'_n(x) = \frac{\cos(nx)}{n^2}$ avec $\|u'_n\|_\infty = \frac{1}{n^2}$: les deux séries convergent normalement sur $\mathbb{R}$. Donc S est de classe C^1 et $S'(x) = \sum_{n \geq 1} \frac{\cos(nx)}{n^2}$. En particulier $S'(0) = \sum \frac{1}{n^2} = \frac{\pi^2}{6}$.



Les dérivées doivent converger

Pour $f_n(x) = \frac{\sin(nx)}{n}$, on a $\|f_n\|_\infty = \frac{1}{n} \rightarrow 0$: f_n converge uniformément vers 0.
Mais $f'_n(x) = \cos(nx)$ ne converge même pas simplement (en $x = \pi$, elle vaut $(-1)^n$). La convergence uniforme de (f_n) ne dit rien sur les dérivées.

7. Approximation uniforme et théorème de Weierstrass



Théorème de Weierstrass

Toute fonction continue f sur un segment $[a, b]$, à valeurs réelles ou complexes, est limite **uniforme** sur $[a, b]$ d'une suite de fonctions polynomiales : pour tout $\varepsilon > 0$, il existe un polynôme P tel que $\|f - P\|_{\infty, [a, b]} \leq \varepsilon$.

Une preuve explicite passe par les **polynômes de Bernstein**. Pour f continue sur $[0, 1]$,

$$B_n(f)(x) = \sum_{k=0}^n \binom{n}{k} f\left(\frac{k}{n}\right) x^k (1-x)^{n-k},$$

et $\|B_n(f) - f\|_\infty \rightarrow 0$. Pour $f(x) = \left|x - \frac{1}{2}\right|$, un point anguleux n'empêche pas l'approximation uniforme.

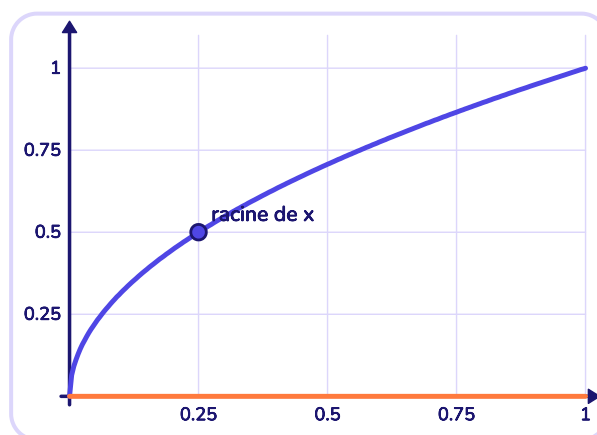
Suites séries fonctions Maths Spé : polynômes de Bernstein de degrés 5, 15 et 40 qui approchent uniformément la fonction valeur absolue de x moins un demi sur $[0,1]$, malgré son point anguleux

E Exemple 8 : B_2 pour $|x - \frac{1}{2}|$

Avec $n = 2$, $f(0) = \frac{1}{2}$, $f(\frac{1}{2}) = 0$, $f(1) = \frac{1}{2}$:

$$B_2(f)(x) = \frac{1}{2}(1-x)^2 + 0 + \frac{1}{2}x^2 = x^2 - x + \frac{1}{2}.$$

L'écart maximal $\|B_2(f) - f\|_\infty = \frac{1}{4}$ est atteint en $x = \frac{1}{2}$.



Weierstrass permet de remplacer une fonction continue par des polynômes, plus faciles à intégrer et à dériver, tout en contrôlant l'erreur sur tout le segment. Plus généralement, **approcher** une fonction pour la norme uniforme garantit que les intégrales et les valeurs en chaque point sont approchées avec la même précision. Le théorème tombe en défaut sur un intervalle non borné : e^x n'est pas limite uniforme de polynômes sur $\mathbb{R}$.



Astuce de Zyro

Quand on te demande si une convergence est uniforme, cherche d'abord le point où l'écart est le plus grand. S'il glisse vers un bord en gardant la même hauteur, la convergence n'est pas uniforme !

À retenir

- **Simple** : x fixé, $f_n(x) \rightarrow f(x)$. **Uniforme** : $\|f_n - f\|_\infty \rightarrow 0$; elle entraîne la convergence simple, pas l'inverse.
- Pour une série, **normale** ($\sum \|u_n\|_\infty < +\infty$) $\Rightarrow$ uniforme $\Rightarrow$ simple.
- Limite uniforme de fonctions continues : **continue**. Sur un segment, $\int f_n \rightarrow \int f$.
- Dérivation : f_n de classe C^1 , convergence simple de f_n et convergence uniforme de f'_n sur tout segment.
- Pour réfuter l'uniformité : limite discontinue, ou points x_n avec $|f_n(x_n) - f(x_n)| \not\rightarrow 0$.
- **Weierstrass** : toute fonction continue sur un segment est limite uniforme de polynômes (par exemple de Bernstein).

Le livre de cours de maths Maths Spé

Tout le programme en un seul PDF de 103 pages, à imprimer ou à garder sur ta tablette.

[Voir le livre](#)

Zyro te conseille la suite

Exercices de maths

Suites et séries de fonctions : exercices de maths Maths Spé

Contrôles de maths

Suites et séries de fonctions : contrôle de maths Maths Spé

QCM de maths

Suites et séries de fonctions : QCM de maths Maths Spé

Exercices de maths

Séries entières : exercices de maths Maths Spé

 Exercices de maths

Intégration sur un intervalle quelconque :
exercices de maths Maths Spé

 Contrôles de maths

Séries entières : contrôle de maths
Maths Spé

Zyro vous emmène sur nos sites partenaires

Embarquez pour d'autres planètes du savoir et leurs applis.

Décollage