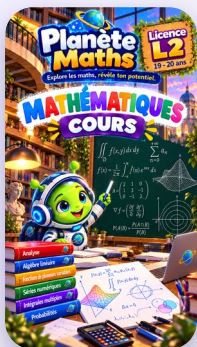


# Suites et séries de fonctions : cours de maths Licence L2 à télécharger en PDF



## Le livre de cours de maths Licence L2

Tout le programme en un seul PDF de 100 pages, à imprimer ou à garder sur ta tablette.

[Voir le livre](#)

Une suite de nombres converge ou non ; une suite de *fonctions* offre bien plus de façons de converger. Ce chapitre précise les modes de convergence (simple, uniforme, normale) et montre pourquoi le plus fort d'entre eux permet de passer à la limite sous les symboles de continuité, d'intégrale et de dérivée. Il se conclut par un résultat remarquable : toute fonction continue sur un segment est limite uniforme de polynômes.

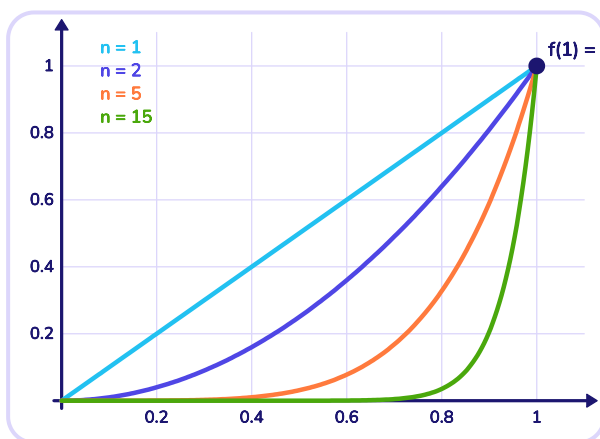
## 1. Convergence simple

### D Convergence simple

Soit  $I$  un intervalle et  $(f_n)$  une suite de fonctions de  $I$  dans  $\mathbb{R}$  (ou  $\mathbb{C}$ ). On dit que  $(f_n)$  converge simplement vers  $f$  sur  $I$  si, pour chaque  $x \in I$ , la suite numérique  $(f_n(x))$  tend vers  $f(x)$ . Formellement :  $\forall x \in I, \forall \varepsilon > 0, \exists N, \forall n \geq N, |f_n(x) - f(x)| \leq \varepsilon$ . Le rang  $N$  peut dépendre de  $x$ .

### E Exemple 1 : les puissances de $x$

Sur  $[0, 1]$ , posons  $f_n(x) = x^n$ . Si  $0 \leq x < 1$ , alors  $x^n \rightarrow 0$  ; si  $x = 1$ ,  $f_n(1) = 1$ . La limite simple est donc la fonction  $f$  nulle sur  $[0, 1[$  et valant 1 en 1. Toutes les  $f_n$  sont continues, mais  $f$  ne l'est pas.



### Attention

La convergence simple est trop faible : elle ne transmet ni la continuité, ni l'intégrale, ni la dérivabilité. L'exemple précédent le montre pour la continuité.

## 2. Convergence uniforme

### D Convergence uniforme

La suite  $(f_n)$  converge uniformément vers  $f$  sur  $I$  si

$\|f_n - f\|_\infty = \sup_{x \in I} |f_n(x) - f(x)| \rightarrow 0$ . De façon équivalente :

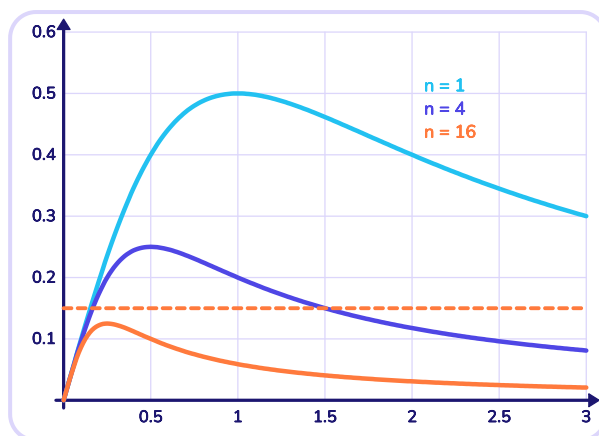
$\forall \varepsilon > 0, \exists N, \forall n \geq N, \forall x \in I, |f_n(x) - f(x)| \leq \varepsilon$ . Le rang  $N$  ne dépend plus de  $x$  : le graphe de  $f_n$  tout entier se loge dans un « tube » de rayon  $\varepsilon$  autour de celui de  $f$ .

### M Méthode : étudier la convergence uniforme

1. Trouver la limite simple  $f$ .
2. Calculer ou majorer  $\|f_n - f\|_\infty$  (étude de fonction, inégalité).
3. Si le majorant tend vers 0, la convergence est uniforme. Pour la réfuter, exhiber  $x_n \in I$  tel que  $|f_n(x_n) - f(x_n)|$  ne tend pas vers 0.

### E Exemple 2 : uniforme sur $\mathbb{R}$

Soit  $f_n(x) = \frac{x}{1 + nx^2}$  sur  $\mathbb{R}$ . La limite simple est 0. Comme  $1 + nx^2 \geq 2\sqrt{n}|x|$  (inégalité  $a + b \geq 2\sqrt{ab}$ ), on a  $|f_n(x)| \leq \frac{1}{2\sqrt{n}}$ , avec égalité en  $x = 1/\sqrt{n}$ . Donc  $\|f_n\|_\infty = \frac{1}{2\sqrt{n}} \rightarrow 0$  : la convergence est uniforme.



### E Exemple 3 : puissances, suite

Sur  $[0, a]$  avec  $0 < a < 1$ ,  $\|x^n\|_\infty = a^n \rightarrow 0$  : convergence uniforme. Sur  $[0, 1[$ , prenons  $x_n = 2^{-1/n} \in [0, 1[$  :  $x_n^n = \frac{1}{2}$  ne tend pas vers 0, donc la convergence n'est pas uniforme. Elle l'est donc sur tout segment de  $[0, 1[$ , mais pas sur  $[0, 1[$ .

### P Propriété

Convergence uniforme  $\Rightarrow$  convergence simple (vers la même limite). La réciproque est fausse.

## I 3. Continuité de la limite

### P Théorème (continuité)

Si les  $f_n$  sont continues sur  $I$  et convergent uniformément vers  $f$ , alors  $f$  est continue sur  $I$ .

*Démonstration.* Soit  $x_0 \in I$  et  $\varepsilon > 0$ . Choisissons  $n$  tel que  $\|f_n - f\|_\infty \leq \varepsilon/3$ , puis  $\delta > 0$  tel que  $|x - x_0| \leq \delta \Rightarrow |f_n(x) - f_n(x_0)| \leq \varepsilon/3$ . Pour un tel  $x$  :

$$|f(x) - f(x_0)| \leq |f(x) - f_n(x)| + |f_n(x) - f_n(x_0)| + |f_n(x_0) - f(x_0)| \leq \varepsilon. \square$$

En contraposée : si les  $f_n$  sont continues et la limite simple est discontinue, la convergence n'est pas uniforme. C'est ce qui arrive à  $x^n$  sur  $[0, 1]$ .



### Attention

La réciproque est fautive : les fonctions  $f_n(x) = n^2 x e^{-nx}$  convergent simplement vers la fonction nulle (continue) sur  $[0, 1]$ , mais  $f_n(1/n) = n/e \rightarrow +\infty$  : pas de convergence uniforme.

## 4. Intégration et dérivation terme à terme



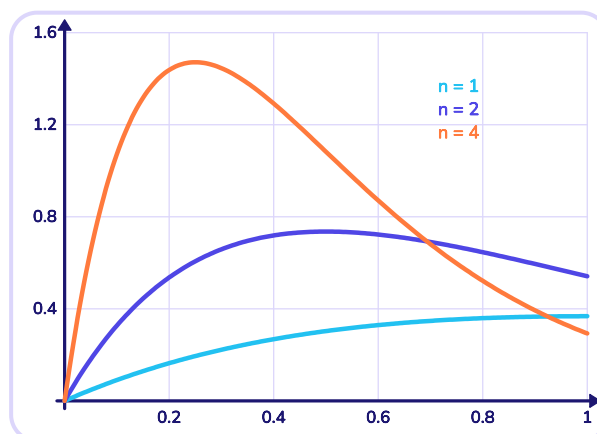
### Théorème (intégration)

Si les  $f_n$  sont continues sur un segment  $[a, b]$  et convergent uniformément vers  $f$ ,

$$\text{alors } \int_a^b f_n \rightarrow \int_a^b f.$$

En effet  $\left| \int_a^b (f_n - f) \right| \leq (b - a) \|f_n - f\|_\infty \rightarrow 0$ . L'hypothèse d'uniformité est essentielle : avec  $f_n(x) = n^2 x e^{-nx}$  sur  $[0, 1]$ , le changement de variable  $u = nx$  donne

$$\int_0^1 n^2 x e^{-nx} dx = \int_0^n u e^{-u} du = 1 - (n + 1)e^{-n} \rightarrow 1 \neq 0 = \int_0^1 \lim f_n.$$



**P****Théorème (dérivation)**

Soit  $(f_n)$  une suite de fonctions de classe  $C^1$  sur un intervalle  $I$ . Si  $(f_n)$  converge simplement vers  $f$  et si  $(f'_n)$  converge uniformément (sur tout segment de  $I$ ) vers  $g$ , alors  $f$  est de classe  $C^1$  et  $f' = g$ .

**⚠****Attention**

Il faut la convergence uniforme des *dérivées*. Les fonctions  $f_n(x) = \sin(nx)/n$  convergent uniformément vers 0, mais  $f'_n(x) = \cos(nx)$  ne converge pas en général (par exemple  $f'_n(\pi) = (-1)^n$ ).

**E****Exemple 4 : dérivation**

Sur  $[0, \frac{1}{2}]$ , soit  $f_n(x) = x + \frac{x^n}{n}$ . On a  $f_n \rightarrow f : x \mapsto x$  et  $f'_n(x) = 1 + x^{n-1} \rightarrow 1$  uniformément car  $\|x^{n-1}\|_\infty = 2^{-(n-1)} \rightarrow 0$ . Le théorème donne  $f' = 1$ , ce qui est bien la dérivée de  $x \mapsto x$ .

**5. Séries de fonctions et convergence normale**

Une série  $\sum u_n$  de fonctions converge simplement (resp. uniformément) lorsque la suite de ses sommes partielles  $S_n = u_0 + \dots + u_n$  le fait. Avec le reste  $R_n = \sum_{k>n} u_k$ , la convergence uniforme équivaut à : convergence simple et  $\|R_n\|_\infty \rightarrow 0$ .

## D Convergence normale

La série  $\sum u_n$  converge normalement sur  $I$  si la série numérique  $\sum \|u_n\|_\infty$  converge.

## P Propriété

Convergence normale  $\Rightarrow$  convergence uniforme et absolue  $\Rightarrow$  convergence simple. En effet  $|R_n(x)| \leq \sum_{k>n} \|u_k\|_\infty$ , reste d'une série convergente. Si  $\sum u_n$  converge uniformément, alors  $\|u_n\|_\infty \rightarrow 0$ .

| Mode             | Condition                               | Limite continue ? | Intégrale sur un segment |
|------------------|-----------------------------------------|-------------------|--------------------------|
| simple           | $f_n(x) \rightarrow f(x)$ pour tout $x$ | pas toujours      | pas toujours             |
| uniforme         | $\ f_n - f\ _\infty \rightarrow 0$      | oui               | oui                      |
| normale (séries) | $\sum \ u_n\ _\infty < \infty$          | oui               | oui                      |

## 6. Critère de Weierstrass

## P Critère de Weierstrass

S'il existe des réels  $M_n \geq 0$  avec  $|u_n(x)| \leq M_n$  pour tout  $x \in I$  et  $\sum M_n < \infty$ , alors  $\sum u_n$  converge normalement sur  $I$ .

**E****Exemple 5 : série trigonométrique**

Soit  $S(x) = \sum_{n \geq 1} \frac{\sin(nx)}{n^2}$ . Comme  $|\sin(nx)/n^2| \leq 1/n^2$  et  $\sum 1/n^2$  converge, la série converge normalement sur  $\mathbb{R}$ . Les termes sont continus :  $S$  est continue sur  $\mathbb{R}$ , et  $|S(x)| \leq \pi^2/6$ .

Les théorèmes des parties 3 et 4 s'étendent aux séries : si les  $u_n$  sont continues et  $\sum u_n$  converge uniformément sur un segment, la somme est continue et  $\int \sum u_n = \sum \int u_n$ . Pour la dérivation, on suppose  $\sum u_n$  simplement convergente et  $\sum u'_n$  uniformément convergente sur tout segment.

**E****Exemple 6 : intégration terme à terme**

Sur  $[0, \frac{1}{2}]$ ,  $\sum x^n$  converge normalement ( $M_n = 2^{-n}$ ) vers  $\frac{1}{1-x}$ . Donc

$$\ln 2 = \int_0^{1/2} \frac{dx}{1-x} = \sum_{n \geq 0} \frac{(1/2)^{n+1}}{n+1} = \sum_{k \geq 1} \frac{1}{k 2^k}.$$
**Attention**

Sur  $] -1, 1[$ , la série  $\sum x^n$  ne converge pas normalement :  $\|x^n\|_\infty = 1$ . Elle converge pourtant normalement sur tout segment  $[-a, a]$  avec  $a < 1$ .

## 7. Théorème de Dini

P

### Théorème de Dini

Soit  $K$  un segment (ou un compact). Si les  $f_n$  sont continues sur  $K$ , convergent simplement vers une fonction  $f$  continue sur  $K$ , et si la suite  $(f_n(x))$  est **monotone** pour chaque  $x$  (croissante pour tous les  $x$  ou décroissante pour tous), alors la convergence est uniforme.

*Idée de la preuve.* Dans le cas décroissant, posons  $g_n = f_n - f \geq 0$  : suite décroissante de fonctions continues tendant simplement vers 0. Pour  $\varepsilon > 0$ , les ouverts  $U_n = \{g_n < \varepsilon\}$  sont emboîtés croissants et recouvrent  $K$ . Par compacité, un seul suffit :  $U_N = K$ , donc  $0 \leq g_n < \varepsilon$  pour  $n \geq N$ .  $\square$

E

### Exemple 7 : Dini en action

Soit  $f_n(x) = x^n(1 - x)$  sur  $[0, 1]$ . La suite est décroissante en  $n$  (car  $0 \leq x \leq 1$ ), converge simplement vers la fonction nulle, continue. Dini donne la convergence uniforme, sans aucun calcul de borne supérieure.

⚠

### Attention

Chaque hypothèse compte. Sur  $[0, 1[$  (non compact),  $x^n$  décroît vers 0 sans converger uniformément. Et si la limite n'est pas continue (cas de  $x^n$  sur  $[0, 1]$ ), le théorème ne s'applique pas.

## 8. Approximation de Weierstrass

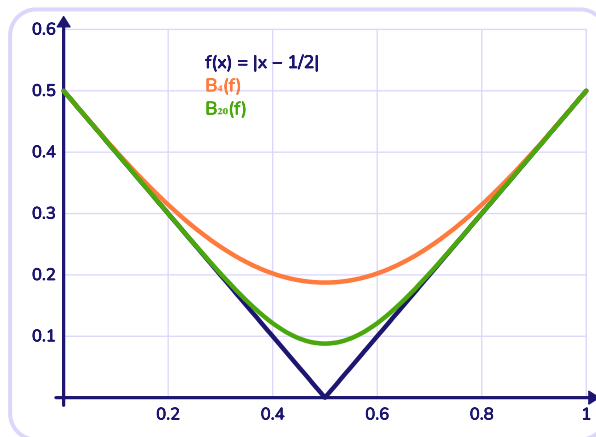
### P Théorème de Weierstrass

Toute fonction continue  $f$  sur un segment  $[a, b]$  est limite uniforme d'une suite de fonctions polynomiales.

Sur  $[0, 1]$ , une construction explicite est fournie par les *polynômes de Bernstein* :

$$B_n(f)(x) = \sum_{k=0}^n f\left(\frac{k}{n}\right) \binom{n}{k} x^k (1-x)^{n-k}, \quad B_n(f) \rightarrow f \text{ uniformément.}$$

Le polynôme  $B_n(f)$  est une moyenne pondérée des valeurs  $f(k/n)$ , les poids  $\binom{n}{k} x^k (1-x)^{n-k}$  se concentrant autour de  $k \approx nx$ .



### E Exemple 8 : Bernstein pour $x^2$

Avec  $f(x) = x^2$ , les poids sont ceux de la loi binomiale de paramètres  $n$  et  $x$ , dont la moyenne est  $nx$  et la variance  $nx(1-x)$ . Ainsi

$$B_n(f)(x) = \frac{nx(1-x) + n^2x^2}{n^2} = x^2 + \frac{x(1-x)}{n} \text{ et } \|B_n(f) - f\|_\infty = \frac{1}{4n} \rightarrow 0.$$



### Astuce de Zyro

Sur ma planète, on dit qu'un polynôme est une « fonction de poche » : avec assez de degrés, il imite n'importe quelle courbe continue d'un segment. Mais le segment est indispensable : aucun polynôme ne tend vers 0 aux deux infinis comme le fait  $e^{-x^2}$  sur  $\mathbb{R}$ .

## À retenir

- Simple : un rang  $N$  par point. Uniforme : un rang  $N$  pour tous les points, soit  $\|f_n - f\|_\infty \rightarrow 0$ .
- Limite uniforme de fonctions continues : fonction continue ; passage à la limite sous une intégrale sur un segment.
- Dérivation terme à terme : il faut la convergence uniforme des dérivées (sur les segments) et la convergence simple des fonctions.
- Normale  $\Rightarrow$  uniforme  $\Rightarrow$  simple ; le critère de Weierstrass ( $|u_n| \leq M_n, \sum M_n < \infty$ ) prouve la convergence normale.
- Dini : sur un compact, suite monotone de fonctions continues convergeant simplement vers une limite continue : convergence uniforme.
- Weierstrass : sur un segment, les polynômes approchent uniformément toute fonction continue (Bernstein).

### Le livre de cours de maths Licence L2

Tout le programme en un seul PDF de 100 pages, à imprimer ou à garder sur ta tablette.

[Voir le livre](#)



## Entraîne-toi : défi express de Licence L2

[Changer de niveau](#)

Niveau : Licence L2

6 questions au hasard, correction tout de suite.



Lancer le défi



**Zyro te conseille la suite**



**Exercices de maths**

Suites et séries de fonctions : exercices  
de maths Licence L2



**Contrôles de maths**

Suites et séries de fonctions : contrôle de  
maths Licence L2



**QCM de maths**



**Exercices de maths**

Suites et séries de fonctions : QCM de maths Licence L2

Séries numériques : exercices de maths Licence L2

 Exercices de maths

Séries entières : exercices de maths  
Licence L2

 Contrôles de maths

Séries numériques : contrôle de maths  
Licence L2

**Zyro vous emmène sur nos sites partenaires**

Embarquez pour d'autres planètes du savoir et leurs applis.

Décollage