

Suites et séries de fonctions : exercices corrigés de maths Maths Spé à télécharger en PDF



Le livre d'exercices corrigés de maths Maths Spé

Tout le programme en un seul PDF de 133 pages, à imprimer ou à garder sur ta tablette.

[Voir le livre](#)

Corrigés rédigés des exercices du chapitre. Vérifie chaque étape, puis corrige-toi.

1 Limites simples



- a. Pour x fixé, $\frac{x}{n+1} \rightarrow 0$: la limite simple est la fonction nulle.
- b. $g_n(x) = \exp(n \ln(1 + x/n))$ et $\ln(1 + x/n) \sim x/n$, donc $n \ln(1 + x/n) \rightarrow x$: la limite simple est $x \mapsto e^x$.
- c. Si $x > 0$, $e^{-nx} \rightarrow 0$; si $x = 0$, $h_n(0) = 1$. La limite est 0 sur $]0, +\infty[$ et 1 en 0.
- d. $|k_n(x)| \leq \frac{1}{\sqrt{n}} \rightarrow 0$: limite nulle.

2 Norme uniforme à calculer



Sur $[0, 3]$, $|f_n(x)| = \frac{x}{n+1}$ est maximale en $x = 3$: $\|f_n\|_\infty = \frac{3}{n+1} \rightarrow 0$. La convergence est **uniforme** sur $[0, 3]$.

Sur $\mathbb{R}$, $\sup |f_n| = +\infty$ (la fonction est affine non nulle) : la convergence **n'est pas uniforme** sur $\mathbb{R}$, mais elle l'est sur tout segment.

3 Vrai ou faux ?



- a. **Faux** : x^n sur $[0, 1]$ est continue, de limite simple discontinue en 1.
- b. **Vrai** : si $\sup_x |f_n(x) - f(x)| \rightarrow 0$, alors $|f_n(x) - f(x)| \rightarrow 0$ pour chaque x .
- c. **Vrai** : $\|R_N\|_\infty \leq \sum_{n>N} \|u_n\|_\infty$, reste d'une série convergente, qui tend vers 0.

4 Normale ou pas ?



- a. $\|u_n\|_\infty = \frac{1}{n^2}$ (atteinte en $x = 0$) et $\sum \frac{1}{n^2}$ converge : convergence normale sur $\mathbb{R}$.
- b. $\|u_n\|_\infty = \frac{1}{n}$ (atteinte en $x = \frac{\pi}{2n}$) et $\sum \frac{1}{n}$ diverge : **pas** de convergence normale sur $\mathbb{R}$.

5 Une série géométrique



Sur $[-\frac{1}{2}, \frac{1}{2}]$, $\|u_n\|_\infty = (\frac{1}{2})^n$ et $\sum (\frac{1}{2})^n$ converge : la convergence est normale. La somme vaut $\frac{1}{1-x}$.

En $x = \frac{1}{3}$: $\frac{1}{1-1/3} = \frac{3}{2}$. En $x = -\frac{1}{2}$: $\frac{1}{1+1/2} = \frac{2}{3}$.

6 Combien de termes ?



Sur $[0, \frac{1}{2}]$, x^n est croissante : $\|f_n\|_\infty = (\frac{1}{2})^n = 2^{-n}$.

On veut $2^{-n} < 10^{-3}$, soit $2^n > 1000$. Comme $2^9 = 512$ et $2^{10} = 1024$, le plus petit entier est $n = 10$.

7 Intégrale et limite



$\int_0^1 x^n dx = \frac{1}{n+1} \rightarrow 0$. La limite simple vaut 0 sauf en 1 : son intégrale sur $[0, 1]$ est 0.

Les deux résultats coïncident.

Remarque : la convergence n'est pas uniforme, donc le théorème ne s'applique pas, mais l'égalité reste vraie ici. Le théorème donne une condition suffisante, pas nécessaire.

8 Un supremum à étudier



Pour x fixé, $f_n(x) \rightarrow 0$. On dérive : $f'_n(x) = \frac{n - x^2}{(n + x^2)^2}$, nulle en $x = \pm\sqrt{n}$. La fonction est impaire, croissante sur $[0, \sqrt{n}]$ puis décroissante, de limite 0 en $+\infty$.

Donc $\|f_n\|_\infty = f_n(\sqrt{n}) = \frac{\sqrt{n}}{2n} = \frac{1}{2\sqrt{n}} \rightarrow 0$: convergence **uniforme** sur $\mathbb{R}$. Par exemple, pour $n = 4$, le maximum est $\frac{1}{4}$.

9 Une bosse qui se rétrécit



a. En $x = 0$, $f_n(0) = 0$; pour $x > 0$, $f_n(x) \sim \frac{1}{nx} \rightarrow 0$. Limite : la fonction nulle.

b. $f_n(1/n) = \frac{1}{1+1} = \frac{1}{2}$ pour tout n . Donc $\|f_n\|_\infty \geq \frac{1}{2}$: la convergence n'est **pas** uniforme sur $[0, +\infty[$.

c. Pour $x \geq a$, $0 \leq f_n(x) \leq \frac{nx}{n^2x^2} = \frac{1}{nx} \leq \frac{1}{na}$, indépendant de x et de limite 0 : convergence uniforme sur $[a, +\infty[$.

10 Le produit x puissance n par 1 moins x



Limite simple : 0 (pour $x < 1$, $x^n \rightarrow 0$; en 1, $f_n(1) = 0$).

$f'_n(x) = x^{n-1}(n - (n+1)x)$, nulle en $x_n = \frac{n}{n+1}$. Le maximum est

$$f_n(x_n) = \left(\frac{n}{n+1}\right)^n \frac{1}{n+1} \leq \frac{1}{n+1} \rightarrow 0.$$

La convergence est donc uniforme sur $[0, 1]$.

11 Une limite qui casse



a. Si $0 \leq x < 1$, $x^n \rightarrow 0$ donc $f_n(x) \rightarrow 0$; si $x = 1$, $f_n(1) = \frac{1}{2}$. La limite est 0 sur $[0, 1[$ et $\frac{1}{2}$ en 1.

b. Les f_n sont continues et f ne l'est pas en 1 : la convergence ne peut pas être uniforme sur $[0, 1]$.

c. Sur $[0, \frac{2}{3}]$, $0 \leq f_n(x) \leq x^n \leq (\frac{2}{3})^n \rightarrow 0$: convergence uniforme.

12 Un cousin de la somme de Bâle



a. $\|u_n\|_\infty = \frac{1}{n^2}$, série convergente : convergence normale, donc uniforme sur $[-1, 1]$.

Les u_n étant continues, S est continue.

b. $S(1) = \frac{\pi^2}{6}$.

c. $S(1) + S(-1) = \sum \frac{1 + (-1)^n}{n^2} = 2 \sum_{m \geq 1} \frac{1}{(2m)^2} = \frac{1}{2} \cdot \frac{\pi^2}{6} = \frac{\pi^2}{12}$. Donc

$$S(-1) = \frac{\pi^2}{12} - \frac{\pi^2}{6} = -\frac{\pi^2}{12}.$$

13 Intégrer terme à terme



Sur $[0, \frac{1}{2}]$, $\|x^n\|_\infty = 2^{-n}$: la série géométrique converge normalement, donc uniformément, vers $\frac{1}{1-x}$. Les x^n sont continues, donc on peut intégrer terme à terme sur le segment.

$$\int_0^{1/2} \frac{dx}{1-x} = [-\ln(1-x)]_0^{1/2} = \ln 2 \text{ et } \int_0^{1/2} x^n dx = \frac{1}{(n+1)2^{n+1}}. \text{ Avec } k = n+1$$
$$: \sum_{k \geq 1} \frac{1}{k 2^k} = \ln 2.$$

14 Racine régularisée



a. $x^2 + 1/n^2 > 0$, donc f_n est C^1 et $f'_n(x) = \frac{x}{\sqrt{x^2 + 1/n^2}}$.

b. $f_n(x) - |x| = \frac{1/n^2}{f_n(x) + |x|} \geq 0$ et, comme $f_n(x) \geq \frac{1}{n}$, cette quantité est $\leq \frac{1/n^2}{1/n} = \frac{1}{n}$. Donc $\|f_n - |x|\|_\infty \leq \frac{1}{n} \rightarrow 0$: limite uniforme $x \mapsto |x|$.

c. $|x|$ n'est pas dérivable en 0 alors que les f_n sont C^1 . C'est que (f'_n) ne converge pas uniformément au voisinage de 0 : elle converge vers le signe de x (et vers 0 en 0), qui est discontinu.

15 Une intégrale qui s'échappe



- a. En 0, $f_n(0) = 0$; pour $x > 0$, $n^2 x e^{-nx} \rightarrow 0$ par croissances comparées. Limite simple : 0.
- b. Une primitive est $F(x) = -n x e^{-nx} - e^{-nx}$ (on vérifie : $F'(x) = -n e^{-nx} + n^2 x e^{-nx} + n e^{-nx} = n^2 x e^{-nx}$). Donc
$$\int_0^1 f_n = F(1) - F(0) = -(n+1)e^{-n} + 1 \rightarrow 1.$$
- c. $f'_n(x) = n^2 e^{-nx}(1 - nx)$, nulle en $x = 1/n$: $\|f_n\|_\infty = f_n(1/n) = \frac{n}{e} \rightarrow +\infty$. La convergence n'est pas uniforme ; et $\lim \int f_n = 1 \neq 0 = \int \lim f_n$, ce qui confirme que l'interversion échoue sans uniformité.

16 Une série trigonométrique de classe C^1



- a. Chaque $u_n(x) = \frac{\sin(nx)}{n^3}$ est C^1 , $\|u_n\|_\infty = \frac{1}{n^3}$ et $\|u'_n\|_\infty = \frac{1}{n^2}$ (avec $u'_n(x) = \frac{\cos(nx)}{n^2}$). Les deux séries convergent normalement sur $\mathbb{R}$. Par le théorème de dérivation, S est C^1 et $S'(x) = \sum_{n \geq 1} \frac{\cos(nx)}{n^2}$.
- b. $S'(0) = \sum \frac{1}{n^2} = \frac{\pi^2}{6}$.
- c. $S'(\pi) = \sum \frac{(-1)^n}{n^2} = S(-1)$ de l'exercice « Un cousin de la somme de Bâle », soit $-\frac{\pi^2}{12}$.

17 Une somme qui explose en zéro



- a. Pour $x \geq a$, $0 < \frac{e^{-nx}}{n} \leq e^{-na}$, terme d'une série géométrique convergente : convergence normale sur $[a, +\infty[$. Tout point de $]0, +\infty[$ est dans un tel intervalle, d'où la continuité de S .
- b. $\sup_{x>0} \frac{e^{-nx}}{n} = \frac{1}{n}$ (limite en 0^+) et $\sum \frac{1}{n}$ diverge : **pas** de convergence normale sur $]0, +\infty[$.
- c. $u'_n(x) = -e^{-nx}$, avec $\|u'_n\|_{\infty, [a, +\infty[} \leq e^{-na}$: convergence normale sur $[a, +\infty[$.
Donc S est C^1 et $S'(x) = -\sum_{n \geq 1} e^{-nx} = -\frac{e^{-x}}{1 - e^{-x}} = -\frac{1}{e^x - 1}$.
- d. La fonction $x \mapsto -\ln(1 - e^{-x})$ a pour dérivée $-\frac{e^{-x}}{1 - e^{-x}}$, la même que S : les deux fonctions diffèrent d'une constante. Quand $x \rightarrow +\infty$, $S(x) \leq \sum e^{-nx} \rightarrow 0$ et $\ln(1 - e^{-x}) \rightarrow 0$, donc la constante est nulle. Ainsi $S(\ln 2) = -\ln \frac{1}{2} = \ln 2$.

18 Weierstrass et les moments



Étape 1. Par linéarité, $\int_0^1 f(t)P(t) dt = 0$ pour tout polynôme P .

Étape 2. D'après Weierstrass, il existe une suite de polynômes (P_k) qui converge uniformément vers f sur $[0, 1]$.

Étape 3. $\left| \int_0^1 f^2 \right| = \left| \int_0^1 f(f - P_k) \right| \leq \|f\|_{\infty} \|f - P_k\|_{\infty} \rightarrow 0$. Donc $\int_0^1 f^2 = 0$.

Étape 4. f^2 est continue, positive, d'intégrale nulle : $f^2 = 0$ sur $[0, 1]$, donc $f = 0$.

19 Polynômes de Bernstein



- a. $f(0) = f(1) = \frac{1}{2}$, $f(\frac{1}{2}) = 0$: $B_2(f)(x) = \frac{1}{2}(1-x)^2 + \frac{1}{2}x^2 = x^2 - x + \frac{1}{2}$.
- b. Sur $[0, \frac{1}{2}]$, $f(x) = \frac{1}{2} - x$ et $B_2(f)(x) - f(x) = x^2$; sur $[\frac{1}{2}, 1]$, par symétrie, l'écart est $(1-x)^2$. Le maximum est $\frac{1}{4}$, atteint en $x = \frac{1}{2}$.
- c. Avec $f(0) = f(1) = \frac{1}{2}$, $f(\frac{1}{4}) = f(\frac{3}{4}) = \frac{1}{4}$, $f(\frac{1}{2}) = 0$, en $x = \frac{1}{2}$:
 $B_4 = 2 \cdot \frac{1}{2} \cdot \frac{1}{16} + 2 \cdot 4 \cdot \frac{1}{4} \cdot \frac{1}{16} = \frac{1}{16} + \frac{1}{8} = \frac{3}{16}$. L'écart avec $f(\frac{1}{2}) = 0$ est $\frac{3}{16} < \frac{1}{4}$: l'approximation s'améliore avec n .

20 Approcher une racine par des polynômes



- a. $f_1(x) = \frac{x}{2}$; $f_2(x) = \frac{x}{2} + \frac{x - x^2/4}{2} = x - \frac{x^2}{8}$.
- b. L'identité vient de $\sqrt{x} - f_{n+1} = \sqrt{x} - f_n - \frac{x - f_n^2}{2}$ et
 $x - f_n^2 = (\sqrt{x} - f_n)(\sqrt{x} + f_n)$. Si $0 \leq f_n \leq \sqrt{x} \leq 1$, le facteur $1 - \frac{\sqrt{x} + f_n}{2}$ est dans $[0, 1]$ donc $\sqrt{x} - f_{n+1} \geq 0$; de plus $f_{n+1} = f_n + \frac{x - f_n^2}{2} \geq f_n \geq 0$.
- c. Comme $f_n \geq 0$, le facteur est $\leq 1 - \frac{\sqrt{x}}{2}$; avec $\sqrt{x} - f_0 = \sqrt{x}$, on obtient la majoration. Posons $t = \sqrt{x} \in [0, 1]$: $t(1 - t/2)^n \leq t e^{-nt/2} \leq \frac{2}{en}$ (maximum de $t e^{-nt/2}$ en $t = 2/n$). La suite de polynômes (f_n) converge donc uniformément vers $\sqrt{x}$ sur $[0, 1]$.

21 Une bosse d'aire qui disparaît



a. En 0 et en 1, $f_n = 0$; pour $x \in]0, 1[$, $n(1-x)^n \rightarrow 0$ (croissances comparées). Limite simple : 0.

b. $f'_n(x) = n(1-x)^{n-1}(1-(n+1)x)$, nulle en $x = \frac{1}{n+1}$. Donc

$$\|f_n\|_\infty = \frac{n}{n+1} \left(\frac{n}{n+1} \right)^n = \left(\frac{n}{n+1} \right)^{n+1} \rightarrow e^{-1}.$$

c. $\int_0^1 f_n = \frac{n}{(n+1)(n+2)} \rightarrow 0 = \int_0^1 \lim f_n$. L'interversion est vraie ici, bien que la convergence ne soit pas uniforme ($\|f_n\|_\infty \rightarrow e^{-1} \neq 0$).

Le livre d'exercices corrigés de maths Maths Spé

Tout le programme en un seul PDF de 133 pages, à imprimer ou à garder sur ta tablette.

[Voir le livre](#)

Zyro te conseille la suite

Exercices de maths

Suites et séries de fonctions : exercices de maths Maths Spé

QCM de maths

Suites et séries de fonctions : QCM de maths Maths Spé



Contrôles de maths

Suites et séries de fonctions : contrôle de maths Maths Spé



Exercices de maths

Séries entières : exercices de maths Maths Spé



Exercices de maths

Intégration sur un intervalle quelconque : exercices de maths Maths Spé



QCM de maths

Séries entières : QCM de maths Maths Spé

Zyro vous emmène sur nos sites partenaires

Embarquez pour d'autres planètes du savoir et leurs applis.

Décollage