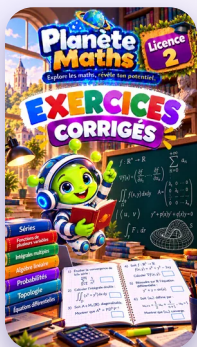


Suites et séries de fonctions : exercices corrigés de maths Licence L2 à télécharger en PDF



Le livre d'exercices corrigés de maths Licence L2

Tout le programme en un seul PDF de 128 pages, à imprimer ou à garder sur ta tablette.

[Voir le livre](#)

Corrigés rédigés des exercices du chapitre. Vérifie chaque étape, puis corrige-toi.

1 Fonction qui se raidit



a) Pour $x > 0$, $f_n(x) = 1 - \frac{1}{1+nx} \rightarrow 1$; pour $x = 0$, $f_n(0) = 0$. Donc $f(0) = 0$ et $f(x) = 1$ si $x > 0$.

b) Les f_n sont continues et f ne l'est pas en 0 : la convergence n'est pas uniforme (contraposée du théorème de continuité).

c) Pour $x \geq \frac{1}{2}$: $0 \leq 1 - f_n(x) = \frac{1}{1+nx} \leq \frac{1}{1+n/2} = \frac{2}{n+2}$, qui tend vers 0. Donc $\|f_n - f\|_\infty \leq \frac{2}{n+2} \rightarrow 0$: convergence uniforme sur $[\frac{1}{2}, +\infty[$.

2 Exponentielle décroissante



- a) Pour $x > 0$, $e^{-nx} \rightarrow 0$: limite simple nulle.
- b) Avec $x_n = \ln 2/n$, $g_n(x_n) = e^{-\ln 2} = \frac{1}{2}$ ne tend pas vers 0 : $\|g_n\|_\infty \geq \frac{1}{2}$, pas de convergence uniforme.
- c) La fonction g_n est décroissante, donc $\|g_n\|_\infty = g_n(\frac{1}{5}) = e^{-n/5}$. On veut $e^{-n/5} \leq 10^{-2}$, c'est-à-dire $n \geq 5 \ln 100 \approx 23,03$. Rang $n = 24$: $e^{-4,8} \approx 0,0082 \leq 0,01$, alors que $n = 23$ donne $e^{-4,6} \approx 0,0101 > 0,01$.

3 Un rang explicite



La fonction $x \mapsto x^n$ est croissante sur $[0; 0,8]$: $\|f_n\|_\infty = 0,8^n$. On cherche $0,8^n \leq 10^{-3}$, soit $n \geq \frac{\ln 10^{-3}}{\ln 0,8} = \frac{-6,9078}{-0,2231} \approx 30,96$.

Réponse : $N = 31$ ($0,8^{31} \approx 9,9 \times 10^{-4}$ alors que $0,8^{30} \approx 1,24 \times 10^{-3}$). Comme la suite $0,8^n$ décroît, la condition reste vraie pour $n \geq 31$.

4 Vrai ou faux ?



- a) Vrai : $|f_n(x) - f(x)| \leq \|f_n - f\|_\infty \rightarrow 0$ pour chaque x .
- b) Faux : $f_n(x) = x^n$ sur $[0, 1]$ est continue mais sa limite simple vaut 0 sur $[0, 1[$ et 1 en 1.
- c) Vrai : c'est la même propriété que a), avec $x = x_0$.

5 Un sinus qui s'étire



- a) Pour $x \in [0, 10]$, $|\sin(x/n)| \leq x/n \leq 10/n$ (car $|\sin t| \leq |t|$). Donc $\|h_n\|_\infty \leq 10/n \rightarrow 0$.
- b) Pour $x_n = n\pi/2$, $h_n(x_n) = \sin(\pi/2) = 1$. Ainsi $\|h_n\|_{\infty, \mathbb{R}} \geq 1$ pour tout n : pas de convergence uniforme sur $\mathbb{R}$, bien que la limite simple soit nulle.

6 Série de cosinus



a) $|\cos(nx)/n^3| \leq 1/n^3$, terme général d'une série convergente : convergence normale (critère de Weierstrass). Les termes sont continus, donc S l'est.

b) $|S(x) - S_N(x)| \leq \sum_{k>N} \frac{1}{k^3} \leq \int_N^{+\infty} \frac{dt}{t^3} = \frac{1}{2N^2}$ (comparaison série-intégrale, $t \mapsto t^{-3}$ décroissante).

c) On veut $\frac{1}{2N^2} \leq 10^{-3}$, soit $N^2 \geq 500$. Comme $22^2 = 484 < 500 \leq 529 = 23^2$, on prend $N = 23$.

7 Série entière sur le segment



a) $\|x^n/n^2\|_{\infty, [-1,1]} = 1/n^2$ et $\sum 1/n^2$ converge : convergence normale.

b) Chaque terme est continu et la convergence est uniforme : S est continue sur $[-1, 1]$. On a $S(0) = 0$ (tous les termes sont nuls) et $|S(x)| \leq \sum 1/n^2 = \pi^2/6 \approx 1,645$. On sait même que $S(1) = \pi^2/6$ et $S(-1) = -\pi^2/12 \approx -0,822$.

8 Un pic qui s'amincit



a) Pour $x \neq 0$, $f_n(x) \sim \frac{1}{nx} \rightarrow 0$; $f_n(0) = 0$. Limite nulle.

b) Posons $t = nx$: $f_n(x) = \frac{t}{1+t^2} \leq \frac{1}{2}$ (car $1+t^2 \geq 2|t|$), avec égalité pour $t = 1$, c'est-à-dire $x = 1/n$. Donc $\|f_n\|_{\infty} = \frac{1}{2}$ ne tend pas vers 0 : pas de convergence uniforme sur $\mathbb{R}$ (ni sur $[0, 1]$).

c) Pour $x \geq a$: $0 \leq f_n(x) \leq \frac{nx}{n^2x^2} = \frac{1}{nx} \leq \frac{1}{na} \rightarrow 0$: convergence uniforme sur $[a, +\infty[$.

9 Borne par étude de fonction



a) $f'_n(x) = nx^{n-1} - (n+1)x^n = x^{n-1}(n - (n+1)x)$. La dérivée est positive sur $[0, \frac{n}{n+1}]$ puis négative : maximum en $x = \frac{n}{n+1}$ et $\|f_n\|_\infty = \left(\frac{n}{n+1}\right)^n \frac{1}{n+1}$.

b) Comme $\frac{n}{n+1} < 1$, $\left(\frac{n}{n+1}\right)^n \leq 1$ donc $\|f_n\|_\infty \leq \frac{1}{n+1} \rightarrow 0$: convergence uniforme vers 0.

c) $\|f_3\|_\infty = \left(\frac{3}{4}\right)^3 \cdot \frac{1}{4} = \frac{27}{256} \approx 0,1055$.

10 Dérivées qui divergent



a) $\|f_n\|_\infty \leq 1/n \rightarrow 0$.

b) $f'_n(x) = \cos(nx)$. En $x = 0$: $f'_n(0) = 1 \rightarrow 1$. En $x = \pi$: $f'_n(\pi) = (-1)^n$ diverge. Les dérivées ne convergent donc pas simplement vers la dérivée 0 de la limite.

c) La convergence uniforme des f_n ne suffit pas pour dériver : il faut celle de (f'_n) . Ici (f'_n) ne converge même pas simplement.

11 Intégrale qui ne passe pas à la limite



a) Pour $x = 0$ ou $x = 1$, $f_n(x) = 0$. Pour $0 < x < 1$, $0 < 1 - x^2 < 1$ et $nq^n \rightarrow 0$ avec $q = 1 - x^2$ (croissance comparée). Limite nulle.

b) Avec $u = 1 - x^2$, $du = -2x dx$: $I_n = \frac{n}{2} \int_0^1 u^n du = \frac{n}{2(n+1)} \rightarrow \frac{1}{2}$.

c) La limite des intégrales ($\frac{1}{2}$) diffère de l'intégrale de la limite (0). Comme les f_n sont continues sur un segment, le théorème d'intégration serait contredit si la convergence était uniforme : elle ne l'est pas.

12 Alternée non normale



- a) $\|u_n\|_\infty = \sup_x \frac{1}{n+x^2} = \frac{1}{n}$ (en $x=0$) ; la série harmonique diverge : pas de convergence normale.
- b) Pour chaque x , la suite $1/(n+x^2)$ décroît vers 0 : le critère des séries alternées donne la convergence et $|R_n(x)| \leq \frac{1}{n+1+x^2} \leq \frac{1}{n+1}$. Donc $\|R_n\|_\infty \leq \frac{1}{n+1} \rightarrow 0$: convergence uniforme.
- c) Les termes sont continus et la convergence est uniforme : S est continue sur $\mathbb{R}$. La convergence uniforme n'est donc pas équivalente à la convergence normale.

13 Sommes partielles de l'exponentielle



- a) Les P_n sont continues ; pour $x \geq 0$, $P_{n+1}(x) - P_n(x) = \frac{x^{n+1}}{(n+1)!} \geq 0$: suite croissante. La limite simple e^x est continue et $[0, 1]$ est un segment : Dini donne la convergence uniforme.
- b) Taylor-Lagrange à l'ordre n en 0 : $e^x - P_n(x) = \frac{e^c x^{n+1}}{(n+1)!}$ pour un $c \in [0, x]$, donc $0 \leq e^x - P_n(x) \leq \frac{e}{(n+1)!}$ sur $[0, 1]$.
- c) $e/6! \approx 3,8 \times 10^{-3}$, $e/7! \approx 5,4 \times 10^{-4}$, $e/8! \approx 6,7 \times 10^{-5} \leq 10^{-4}$. Le plus petit n est donc $n+1=8$, soit $n=7$.

14 Une intégrale de série



Sur $[0, \frac{1}{2}]$, $\|x^n\|_\infty = 2^{-n}$: la série converge normalement, donc uniformément ; les termes sont continus sur un segment, on peut intégrer terme à terme.

$$\int_0^{1/2} \sum_{n \geq 1} x^n dx = \sum_{n \geq 1} \frac{(1/2)^{n+1}}{n+1} = \sum_{k \geq 2} \frac{1}{k 2^k}.$$

Directement, $\sum_{n \geq 1} x^n = \frac{x}{1-x} = \frac{1}{1-x} - 1$, d'où

$$\int_0^{1/2} \left(\frac{1}{1-x} - 1 \right) dx = \left[-\ln(1-x) - x \right]_0^{1/2} = \ln 2 - \frac{1}{2} \approx 0,1931.$$

15 Somme d'une série de fractions



a) $0 < \frac{1}{n^2 + x^2} \leq \frac{1}{n^2}$: Weierstrass donne la convergence normale. Les termes sont continus, donc S est continue.

b) Chaque terme est pair, donc S aussi. Chaque terme est décroissant sur $[0, +\infty[$, donc S aussi (somme de fonctions décroissantes).

c) $S(0) = \sum 1/n^2 = \pi^2/6 \approx 1,645$. Par b), $0 < S(x) \leq \pi^2/6$ pour tout réel x .

16 Convergence par morceaux



a) Si $0 \leq x < 1$, $x^n \rightarrow 0$ donc $f_n(x) \rightarrow 0$. Si $x = 1$, $f_n(1) = \frac{1}{2}$. Si $x > 1$, $x^n \rightarrow +\infty$ et $f_n(x) = 1 - \frac{1}{1+x^n} \rightarrow 1$.

b) Les f_n sont continues et f présente un saut en 1 : la convergence n'est pas uniforme sur $[0, 2]$.

c) Sur $[0, \frac{3}{4}]$: $0 \leq f_n \leq x^n \leq (\frac{3}{4})^n \rightarrow 0$. Sur $[\frac{3}{2}, 2]$:

$0 \leq 1 - f_n(x) = \frac{1}{1+x^n} \leq \frac{1}{1+(3/2)^n} \leq (\frac{2}{3})^n \rightarrow 0$. Les deux convergences sont uniformes.

17 Une série dérivable



a) $|\sin(nx)/n^3| \leq 1/n^3$: convergence normale sur $\mathbb{R}$, donc S est définie et continue.

b) Les termes $u_n(x) = \sin(nx)/n^3$ sont C^1 et $u'_n(x) = \frac{\cos(nx)}{n^2}$, avec $|u'_n| \leq 1/n^2$: $\sum u'_n$ converge normalement, donc uniformément, sur $\mathbb{R}$. Comme $\sum u_n$ converge simplement, le théorème de dérivation donne $S \in C^1$ et $S'(x) = \sum_{n \geq 1} \frac{\cos(nx)}{n^2}$.

c) $S'(0) = \sum_{n \geq 1} \frac{1}{n^2} = \frac{\pi^2}{6}$.

18 Série sans convergence uniforme

★★★★

a) $u'_n(x) = e^{-nx}(1 - nx)$: maximum en $x = 1/n$, donc $\|u_n\|_\infty = \frac{1}{ne}$. La série $\sum \frac{1}{ne}$ diverge : pas de convergence normale.

b) Pour $x > 0$, série géométrique de raison e^{-x} : $S(x) = \frac{xe^{-x}}{1 - e^{-x}} = \frac{x}{e^x - 1}$. Pour $x = 0$, tous les termes sont nuls : $S(0) = 0$.

c) $R_n(x) = \sum_{k>n} xe^{-kx} = \frac{xe^{-(n+1)x}}{1 - e^{-x}} = \frac{x}{e^x - 1} e^{-nx}$ pour $x > 0$. Quand $x \rightarrow 0^+$, $\frac{x}{e^x - 1} \rightarrow 1$ et $e^{-nx} \rightarrow 1$: $R_n(x) \rightarrow 1$. Donc $\|R_n\|_\infty \geq 1$ (autrement dit S est discontinue en 0, alors que les u_n sont continues) : pas de convergence uniforme sur $[0, +\infty[$.

d) Comme $e^x - 1 \geq x$, on a $\frac{x}{e^x - 1} \leq 1$ et, pour $x \geq a$, $0 \leq R_n(x) \leq e^{-nx} \leq e^{-na} \rightarrow 0$: convergence uniforme sur $[a, +\infty[$.

19 Bernstein à la main

★★★★

a) $B_2(f)(x) = 0 \cdot (1 - x)^2 + \frac{1}{4} \cdot 2x(1 - x) + 1 \cdot x^2 = \frac{x(1 - x)}{2} + x^2$, ce qui correspond à la formule pour $n = 2$.

b) $B_n(f)(x) - f(x) = \frac{x(1 - x)}{n}$. Le maximum de $x(1 - x)$ sur $[0, 1]$ vaut $\frac{1}{4}$ en $x = \frac{1}{2}$: $\|B_n(f) - f\|_\infty = \frac{1}{4n}$.

c) $\frac{1}{4n} \leq 0,01 \iff n \geq 25$. Il suffit donc de $n = 25$.

20 Moments nuls

★★★★

Par linéarité, $\int_0^1 f(t)P(t) dt = 0$ pour tout polynôme P . Par le théorème de Weierstrass, il existe des polynômes P_n avec $\|P_n - f\|_\infty \rightarrow 0$. Alors

$$\int_0^1 f^2 = \int_0^1 f(f - P_n) + \int_0^1 fP_n = \int_0^1 f(f - P_n), \quad \text{donc} \quad \int_0^1 f^2 \leq \|f\|_\infty \|f - P_n\|_\infty$$

Ainsi $\int_0^1 f^2 = 0$. Comme f^2 est continue et positive, elle est nulle sur $[0, 1]$ (sinon son intégrale serait strictement positive), donc $f = 0$.

21 Les hypothèses de Dini

★★★★

a) Pour $x > 0$, $f_n(x) \downarrow 0$ (limite continue). Mais $\|f_n\|_\infty = \sup_{x \in [0,1]} \frac{1}{1+nx} = 1$ (borne approchée quand $x \rightarrow 0^+$) : pas de convergence uniforme.

b) La limite simple est 0, $[0, 1]$ est compact, mais $g_n(1/n) = 1/e$ pour tout n : $\|g_n\|_\infty \geq 1/e$. La suite n'est pas monotone : en $x = \frac{1}{2}$, $g_1 = 0,303$, $g_2 = 0,368$, $g_3 = 0,335$ (croît puis décroît).

c) La suite x^n décroît en n pour chaque $x \in [0, 1]$, mais la limite est discontinue en 1 : la convergence n'est pas uniforme.

22 Une limite non dérivable

★★★★

a) $x^2 + \frac{1}{n} > 0$, donc f_n est C^1 comme composée. Pour tout x :

$$0 \leq f_n(x) - |x| = \frac{1/n}{f_n(x) + |x|} \leq \frac{1/n}{\sqrt{1/n}} = \frac{1}{\sqrt{n}} \quad (\text{car } f_n(x) \geq \sqrt{1/n}). \text{ Donc}$$

$$\|f_n - |x|\|_\infty \leq 1/\sqrt{n} \rightarrow 0.$$

b) La limite $|x|$ n'est pas dérivable en 0 (limite uniforme de fonctions C^1 sans être C^1). Cela ne contredit pas le théorème : $f'_n(x) = \frac{x}{\sqrt{x^2 + 1/n}}$ converge simplement vers $\text{sgn}(x)$,

discontinue, donc la convergence des dérivées n'est pas uniforme (une limite uniforme de fonctions continues serait continue).

Le livre d'exercices corrigés de maths Licence L2

Tout le programme en un seul PDF de 128 pages, à imprimer ou à garder sur ta tablette.

Voir le livre



Entraîne-toi : défi express de Licence L2

Changer de niveau

Niveau : Licence L2

6 questions au hasard, correction tout de suite.



Lancer le défi



Zyro te conseille la suite



Exercices de maths

Suites et séries de fonctions : exercices de maths Licence L2



QCM de maths

Suites et séries de fonctions : QCM de maths Licence L2



Contrôles de maths

Suites et séries de fonctions : contrôle de maths Licence L2



Exercices de maths

Séries numériques : exercices de maths Licence L2



Exercices de maths

Séries entières : exercices de maths Licence L2



QCM de maths

Séries numériques : QCM de maths Licence L2

Zyro vous emmène sur nos sites partenaires

Embarquez pour d'autres planètes du savoir et leurs applis.

Décollage