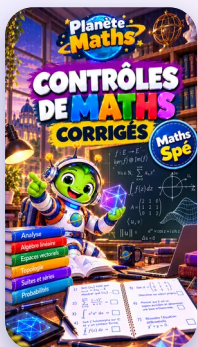


Suites et séries de fonctions : corrigé du contrôle de maths Maths Spé à télécharger en PDF



Le livre de contrôles corrigés de maths Maths Spé

Tout le programme en un seul PDF de 50 pages, à imprimer ou à garder sur ta tablette.

[Voir le livre](#)

Corrigé du contrôle avec le barème détaillé. Compte tes points et repère ce qu'il faut revoir.

Durée conseillée : 45 minutes. Barème sur 20 points. Calculatrice autorisée seulement quand l'énoncé le précise.

1 Une convergence uniforme sur $\mathbb{R}$

/ 4 pts

a. Si $x = 0$, $f_n(0) = 0$; si $x \neq 0$, $nx^2 \rightarrow +\infty$ donc $f_n(x) \rightarrow 0$. Limite : la fonction nulle. (1 pt)

b. $f'_n(x) = e^{-nx^2}(1 - 2nx^2)$, nulle en $x = \frac{1}{\sqrt{2n}}$; f_n croît puis décroît sur $[0, +\infty[$ (limite 0). Le maximum vaut $f_n\left(\frac{1}{\sqrt{2n}}\right) = \frac{e^{-1/2}}{\sqrt{2n}}$; la fonction étant impaire, $\|f_n\|_\infty = \frac{e^{-1/2}}{\sqrt{2n}}$. (2 pts)

c. $\|f_n\|_\infty \rightarrow 0$: convergence uniforme sur $\mathbb{R}$. (1 pt)

2 Limite discontinue

/ 4 pts

a. Si $0 \leq x < 1$, $f_n(x) \rightarrow 1$; si $x = 1$, $f_n(1) = \frac{1}{2}$; si $x > 1$, $f_n(x) \rightarrow 0$. (1 pt)

b. Les f_n sont continues et la limite est discontinue en 1 : la convergence n'est pas uniforme sur $[0, 2]$. (1 pt)

c. Sur $[0, \frac{1}{2}]$, $|f_n(x) - 1| = \frac{x^n}{1+x^n} \leq x^n \leq 2^{-n} \rightarrow 0$. (1 pt)

d. Sur $[\frac{3}{2}, 2]$, $|f_n(x) - 0| = \frac{1}{1+x^n} \leq \frac{1}{x^n} \leq \left(\frac{2}{3}\right)^n \rightarrow 0$. (1 pt)

3 Intégrer une série

/ 3 pts

a. $\|u_n\|_\infty = \frac{1}{n^2 + 1} \leq \frac{1}{n^2}$, série convergente. (1 pt)

b. Les u_n sont continues et la convergence est uniforme : S est continue sur $\mathbb{R}$. (1 pt)

c. Intégration terme à terme sur le segment $[0, \pi]$: $\int_0^\pi \frac{\cos(nx)}{n^2 + 1} dx = \frac{\sin(n\pi)}{n(n^2 + 1)} = 0$.

Donc $\int_0^\pi S = 0$. (1 pt)

4 Dériver une série

/ 3 pts

- a. $u'_n(x) = -\frac{\sin(nx)}{n^2}$, $\|u'_n\|_\infty = \frac{1}{n^2}$, série convergente. (1 pt)
- b. $\sum u_n$ converge simplement ($|u_n| \leq 1/n^3$) et $\sum u'_n$ converge uniformément : S est C^1 et $S'(x) = -\sum_{n \geq 1} \frac{\sin(nx)}{n^2}$. (1 pt)
- c. $S'(0) = 0$. Pour $x = \frac{\pi}{2}$, $\sin(\frac{n\pi}{2})$ vaut $1, 0, -1, 0, \dots$, d'où
 $S'(\frac{\pi}{2}) = -\left(1 - \frac{1}{9} + \frac{1}{25} - \frac{1}{49} + \dots\right)$. (1 pt)

5 Limite uniforme et intégrale

/ 3 pts

- a. Pour $x \in]0, 1]$, $f_n(x) = x + \frac{1}{n} \ln(1 + e^{-nx}) \rightarrow x$; en 0, $f_n(0) = \frac{\ln 2}{n} \rightarrow 0$. Donc $f(x) = x$ sur $[0, 1]$. (1 pt)
- b. Pour $x \in [0, 1]$, $f_n(x) - x = \frac{1}{n} \ln(1 + e^{-nx}) \in \left[0, \frac{\ln 2}{n}\right]$ car $0 < e^{-nx} \leq 1$. (1 pt)
- c. La convergence est uniforme sur le segment $[0, 1]$ et les f_n sont continues :
 $\int_0^1 f_n \rightarrow \int_0^1 x dx = \frac{1}{2}$. (1 pt)

6 Un polynôme de Bernstein

/ 3 pts

- a. $B_2(f)(x) = 0 + 2 \cdot \frac{1}{4} x(1-x) + 1 \cdot x^2 = x^2 + \frac{x(1-x)}{2}$: on retrouve la formule avec $n = 2$. (1 pt)
- b. $B_n(f)(x) - f(x) = \frac{x(1-x)}{n} \geq 0$, maximal en $x = \frac{1}{2}$: $\|B_n(f) - f\|_\infty = \frac{1}{4n}$. (1 pt)
- c. $\frac{1}{4n} \leq 10^{-2} \iff n \geq 25$. Le plus petit entier est $n = 25$. (1 pt)

Le livre de contrôles corrigés de maths Maths Spé

Tout le programme en un seul PDF de 50 pages, à imprimer ou à garder sur ta tablette.

Voir le livre

Zyro te conseille la suite

Contrôles de maths

Suites et séries de fonctions : contrôle de maths Maths Spé

Cours de maths

Suites et séries de fonctions : cours de maths Maths Spé

QCM de maths

Suites et séries de fonctions : QCM de maths Maths Spé

Contrôles de maths

Séries entières : contrôle de maths Maths Spé



Contrôles de maths

Intégration sur un intervalle quelconque :
contrôle de maths Maths Spé



Cours de maths

Séries entières : cours de maths Maths
Spé

Zyro vous emmène sur nos sites partenaires

Embarquez pour d'autres planètes du savoir et leurs applis.

Décollage