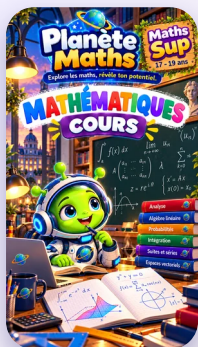


Suites réelles et complexes : cours de maths Maths Sup à télécharger en PDF



Le livre de cours de maths Maths Sup

Tout le programme en un seul PDF de 103 pages, à imprimer ou à garder sur ta tablette.

[Voir le livre](#)

Une suite est une liste infinie de nombres, rangés dans l'ordre : températures relevées chaque jour, capital d'un placement, approximations successives d'une racine. En classes préparatoires, on ne se contente plus de « voir » vers quoi tend une suite : on le **démontre**, avec des inégalités précises, et on étend la théorie aux nombres complexes. Ce chapitre rassemble les outils de base : définition de la limite, comparaisons, suites monotones et adjacentes, sous-suites, récurrences, équivalents.

1. Suites réelles et complexes : vocabulaire

D Suite

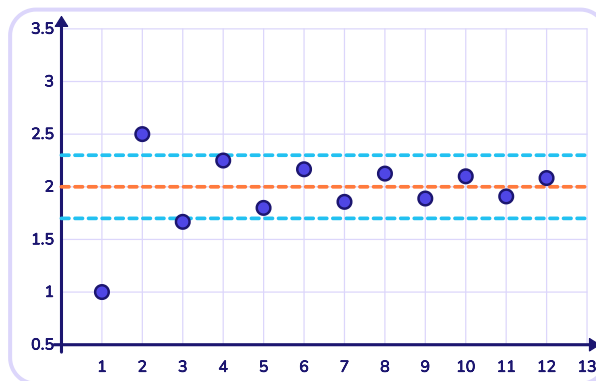
Une suite réelle (resp. complexe) est une application $u : \mathbb{N} \rightarrow \mathbb{R}$ (resp. $\mathbb{C}$), notée $(u_n)_{n \in \mathbb{N}}$. Elle est **bornée** s'il existe $M \geq 0$ tel que $|u_n| \leq M$ pour tout n ; le module $|\cdot|$ joue le rôle de la valeur absolue dans le cas complexe.

Pour une suite réelle, on parle aussi de suite **croissante** ($u_{n+1} \geq u_n$ pour tout n), **décroissante**, **majorée**, **minorée**. Ces notions n'ont pas de sens pour une suite complexe, puisque $\mathbb{C}$ n'est pas ordonné : seule la notion de module, donc de distance, subsiste. Une propriété est dite vraie **à partir d'un certain rang** si elle est vraie pour tout $n \geq N$, pour un entier N .

2. Convergence et limite

D Suite convergente

La suite (u_n) **converge vers** ℓ si, pour tout $\varepsilon > 0$, il existe un rang N tel que $|u_n - \ell| \leq \varepsilon$ pour tout $n \geq N$. On écrit $u_n \rightarrow \ell$. Elle **tend vers** $+\infty$ si, pour tout réel A , on a $u_n \geq A$ à partir d'un certain rang.



Sur la figure, tous les termes d'indice assez grand rentrent dans la bande de largeur **0,3** autour de la limite **2** : c'est exactement l'idée de la définition avec $\varepsilon = 0,3$.

P**Propriétés de base**

1) La limite, si elle existe, est **unique**. 2) Toute suite convergente est **bornée**. 3) Si $u_n \rightarrow \ell$ et $v_n \rightarrow \ell'$, alors $u_n + v_n \rightarrow \ell + \ell'$, $u_n v_n \rightarrow \ell \ell'$ et, si $\ell' \neq 0$, $u_n / v_n \rightarrow \ell / \ell'$. 4) Une suite complexe (z_n) converge vers ℓ si et seulement si $|z_n - \ell| \rightarrow 0$, si et seulement si $(\operatorname{Re} z_n)$ et $(\operatorname{Im} z_n)$ convergent vers $\operatorname{Re} \ell$ et $\operatorname{Im} \ell$.

E**Exemple 1 : la définition en action**

Soit $u_n = \frac{3n+1}{n+2}$. Montrons que $u_n \rightarrow 3$. On calcule

$$u_n - 3 = \frac{3n+1 - 3n-6}{n+2} = \frac{-5}{n+2}, \text{ donc } |u_n - 3| = \frac{5}{n+2}.$$

Soit $\varepsilon > 0$. On a $\frac{5}{n+2} < \varepsilon$ dès que $n > \frac{5}{\varepsilon} - 2$; il suffit de prendre pour N un entier supérieur à $\frac{5}{\varepsilon}$. Pour $\varepsilon = 10^{-3}$, le rang $N = 4999$ convient.

A**Attention**

« Convergente implique bornée » ne se renverse pas : la suite $((-1)^n)$ est bornée et ne converge pas. Pour prouver une divergence, on exhibe deux sous-suites de limites différentes (voir la partie 5).

3. Théorèmes de comparaison

P

Théorèmes de comparaison

- a) **Passage à la limite dans une inégalité large** : si $u_n \leq v_n$ à partir d'un certain rang, et si $u_n \rightarrow \ell$, $v_n \rightarrow \ell'$, alors $\ell \leq \ell'$. Une inégalité stricte devient large à la limite.
- b) **Théorème d'encadrement** : si $u_n \leq w_n \leq v_n$ à partir d'un certain rang et si $u_n \rightarrow \ell$ et $v_n \rightarrow \ell$, alors $w_n \rightarrow \ell$.
- c) **Minoration** : si $u_n \leq v_n$ et $u_n \rightarrow +\infty$, alors $v_n \rightarrow +\infty$.
- d) Si $u_n \rightarrow 0$ et si (v_n) est bornée, alors $u_n v_n \rightarrow 0$.

E

Exemple 2 : une somme à encadrer

Pour $n \geq 1$, posons $S_n = \sum_{k=1}^n \frac{n}{n^2 + k}$. Pour $1 \leq k \leq n$, on a $n^2 + 1 \leq n^2 + k \leq n^2 + n$, donc $\frac{n}{n^2 + n} \leq \frac{n}{n^2 + k} \leq \frac{n}{n^2 + 1}$. En additionnant les n termes :

$$\frac{n^2}{n^2 + n} \leq S_n \leq \frac{n^2}{n^2 + 1}.$$

Les deux membres extrêmes tendent vers 1 : d'après le théorème d'encadrement, $S_n \rightarrow 1$.

4. Suites monotones, bornées, adjacentes

P Théorème de la limite monotone

Toute suite réelle **croissante et majorée** converge ; toute suite croissante non majorée tend vers $+\infty$. Symétriquement, toute suite décroissante et minorée converge.

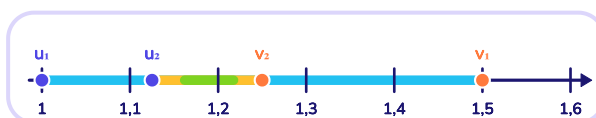
D Suites adjacentes

Deux suites réelles (u_n) et (v_n) sont **adjacentes** si (u_n) est croissante, (v_n) est décroissante et $v_n - u_n \rightarrow 0$.

P Théorème des suites adjacentes

Deux suites adjacentes convergent vers **la même limite** ℓ , et $u_n \leq \ell \leq v_n$ pour tout n .

En effet $v_n - u_n$ est décroissante et tend vers 0, donc elle est positive : $u_0 \leq u_n \leq v_n \leq v_0$. Les deux suites sont monotones et bornées, donc convergent, et la limite de $v_n - u_n$ est nulle : les limites coïncident. Géométriquement, les segments $[u_n, v_n]$ sont emboîtés et leur longueur tend vers 0.



E

Exemple 3 : approximation par encadrement

Posons $u_n = \sum_{k=1}^n \frac{1}{k^3}$ et $v_n = u_n + \frac{1}{2n^2}$. La suite (u_n) est clairement croissante.

Ensuite

$$v_{n+1} - v_n = \frac{1}{(n+1)^3} + \frac{1}{2(n+1)^2} - \frac{1}{2n^2} = \frac{2n^2 - (2n+1)(n+1)}{2n^2(n+1)^3} = \frac{-(3n+1)}{2n^2(n+1)^3}$$

donc (v_n) est décroissante. Enfin $v_n - u_n = \frac{1}{2n^2} \rightarrow 0$. Les suites sont adjacentes : elles convergent vers une même limite ℓ , et par exemple $u_3 \leq \ell \leq v_3$, soit $1,162 \leq \ell \leq 1,218$.

5. Sous-suites et théorème de Bolzano-Weierstrass

D

Sous-suite

Une **extraction** est une application $\varphi : \mathbb{N} \rightarrow \mathbb{N}$ strictement croissante. La suite $(u_{\varphi(n)})$ est une **sous-suite** de (u_n) . Les suites (u_{2n}) et (u_{2n+1}) en sont des exemples.

P

Propriétés

1) Si $u_n \rightarrow \ell$, toute sous-suite de (u_n) converge aussi vers ℓ . 2) Si (u_{2n}) et (u_{2n+1}) convergent vers la **même** limite ℓ , alors $u_n \rightarrow \ell$. 3) **Bolzano-Weierstrass** : de toute suite réelle ou complexe **bornée**, on peut extraire une sous-suite convergente.

L'idée de la démonstration, dans le cas réel : on coupe l'intervalle borné contenant la suite en deux moitiés ; l'une d'elles contient une infinité de termes ; on la garde et on recommence. On construit ainsi des intervalles emboîtés de longueur tendant vers 0, et un terme de chaque intervalle,

d'indices croissants, fournit la sous-suite cherchée. Pour une suite complexe, on applique le résultat réel à la partie réelle, puis à la partie imaginaire de la sous-suite obtenue.

Conséquence pratique : si une suite possède deux sous-suites de limites différentes, elle diverge. Ainsi $u_n = (-1)^n$ diverge car $u_{2n} = 1$ et $u_{2n+1} = -1$.

6. Suites récurrentes $u_{n+1} = f(u_n)$

M

Méthode d'étude

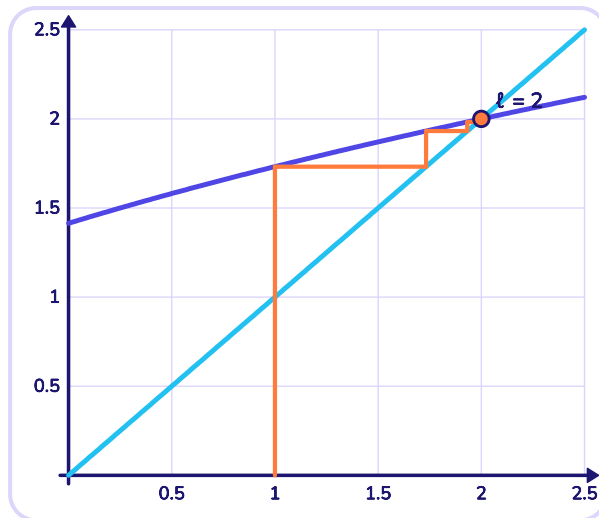
1. Trouver un intervalle I **stable** par f ($f(I) \subset I$) qui contient u_0 : toute la suite reste alors dans I (récurrence).
2. Si f est **croissante** sur I , la suite est monotone : le sens se lit en comparant u_0 et u_1 . Si f est **décroissante**, ce sont (u_{2n}) et (u_{2n+1}) qui sont monotones, de sens contraires.
3. Appliquer le théorème de la limite monotone.
4. Si f est continue et $u_n \rightarrow \ell$, alors ℓ vérifie $f(\ell) = \ell$: c'est un **point fixe**. On résout cette équation et on retient la solution compatible avec l'intervalle.

E

Exemple 4 : une racine itérée

Soit $u_0 = 1$ et $u_{n+1} = \sqrt{2 + u_n}$. Sur $I = [0, 2]$, la fonction $f(x) = \sqrt{2 + x}$ est croissante et $f(I) = [\sqrt{2}, 2] \subset I$: donc $0 \leq u_n \leq 2$ pour tout n .

Pour $x \in [0, 2]$, $f(x) - x = \frac{2 + x - x^2}{\sqrt{2 + x} + x} = \frac{(2 - x)(1 + x)}{\sqrt{2 + x} + x} \geq 0$, donc (u_n) est croissante. Croissante et majorée par 2, elle converge vers un réel ℓ qui vérifie $\ell = \sqrt{2 + \ell}$, soit $\ell^2 - \ell - 2 = 0$, donc $\ell = 2$ (l'autre racine, -1 , est négative).



Astuce de Zyro

Pour deviner la limite d'une suite récurrente avant de la démontrer, trace la courbe de f et la droite $y = x$: les points fixes sont leurs intersections, et l'« escalier » de la figure montre si la suite s'en approche ou s'en éloigne.

7. Suites négligeables et équivalentes



Négligeabilité et équivalence

Soit (v_n) une suite qui ne s'annule pas à partir d'un certain rang. On dit que (u_n) est **négligeable devant** (v_n) , et on note $u_n = o(v_n)$, si $\frac{u_n}{v_n} \rightarrow 0$. On dit que (u_n) est **équivalente** à (v_n) , et on note $u_n \sim v_n$, si $\frac{u_n}{v_n} \rightarrow 1$, c'est-à-dire $u_n - v_n = o(v_n)$.

P**Règles de calcul**

Les équivalents se **multiplient**, se **divisent** et s'élèvent à une puissance fixée : si $u_n \sim a_n$ et $v_n \sim b_n$, alors $u_n v_n \sim a_n b_n$, $u_n / v_n \sim a_n / b_n$ et $u_n^p \sim a_n^p$. Deux suites équivalentes ont la même limite quand elle existe. Hiérarchie de croissance (pour $a > 0$ et $q > 1$) : $\ln n = o(n^a)$, $n^a = o(q^n)$, $q^n = o(n!)$.

**Attention**

On ne **somme pas** des équivalents et on ne les compose pas par une fonction quelconque : $n + 1 \sim n$ et $-n \sim -n$, mais $1 \not\sim 0$. Dans une somme, on factorise d'abord le terme dominant, puis on utilise le reste.

E**Exemple 5 : un équivalent après une quantité conjuguée**

Posons $w_n = \sqrt{n+1} - \sqrt{n}$. Une soustraction de deux grandeurs équivalentes est dangereuse ; on multiplie par la quantité conjuguée :

$$w_n = \frac{1}{\sqrt{n+1} + \sqrt{n}} \sim \frac{1}{2\sqrt{n}},$$

car le rapport $\frac{\sqrt{n+1} + \sqrt{n}}{2\sqrt{n}} = \frac{\sqrt{1+1/n} + 1}{2}$ tend vers 1. Ainsi $w_n \rightarrow 0$, et w_n décroît à la manière de $\frac{1}{2\sqrt{n}}$.

8. Suites arithmético-géométriques

Ce sont les suites définies par $u_{n+1} = au_n + b$, avec $a \neq 1$ (si $a = 1$, la suite est arithmétique).

Le réel (ou complexe) $\ell = \frac{b}{1-a}$ est l'unique point fixe de $x \mapsto ax + b$.

M

Méthode

1. Calculer le point fixe ℓ en résolvant $\ell = a\ell + b$.
2. Poser $v_n = u_n - \ell$: alors $v_{n+1} = av_n$, la suite (v_n) est **géométrique**.
3. Conclure : $u_n = \ell + a^n(u_0 - \ell)$.

Cette formule vaut aussi pour $a \in \mathbb{C}$. La suite converge vers ℓ si et seulement si $|a| < 1$ ou $u_0 = \ell$; sinon, elle diverge.

E

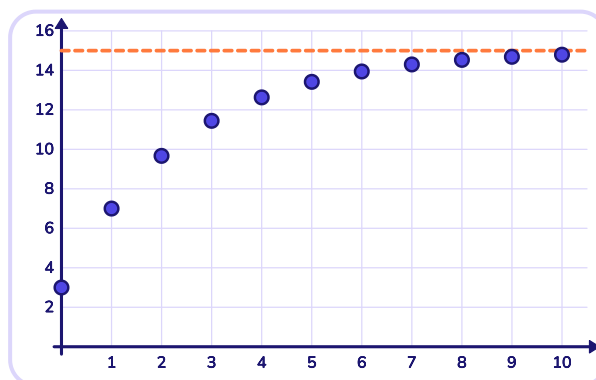
Exemple 6 : un réservoir qui se remplit

Soit $u_0 = 3$ et $u_{n+1} = \frac{2}{3}u_n + 5$. Le point fixe vérifie $\ell = \frac{2}{3}\ell + 5$, donc $\ell = 15$. Avec $v_n = u_n - 15$, on a $v_{n+1} = \frac{2}{3}v_n$ et $v_0 = -12$, donc

$$u_n = 15 - 12\left(\frac{2}{3}\right)^n.$$

Comme $\left|\frac{2}{3}\right| < 1$, on a $u_n \rightarrow 15$, par valeurs croissantes. Vérification :

$$u_1 = \frac{2}{3} \times 3 + 5 = 7 = 15 - 8.$$



À retenir

- $u_n \rightarrow \ell$ signifie : pour tout $\varepsilon > 0$, $|u_n - \ell| \leq \varepsilon$ à partir d'un certain rang ; la limite est unique et une suite convergente est bornée.
- Une suite complexe converge si et seulement si ses parties réelle et imaginaire convergent, ou si $|z_n - \ell| \rightarrow 0$.
- Encadrement, minoration et produit « borné fois tend vers 0 » sont les trois réflexes de comparaison.
- Croissante et majorée implique convergente ; deux suites adjacentes ont la même limite, qui les encadre.
- Bolzano-Weierstrass : toute suite bornée admet une sous-suite convergente ; deux sous-suites de limites distinctes prouvent la divergence.
- Pour $u_{n+1} = f(u_n)$: intervalle stable, monotonie, limite monotone, puis équation $f(\ell) = \ell$.
- Les équivalents passent au produit, au quotient et à la puissance, jamais à la somme.
- Arithmético-géométrique : $u_n = \ell + a^n(u_0 - \ell)$ avec $\ell = \frac{b}{1-a}$.

Le livre de cours de maths Maths Sup

Tout le programme en un seul PDF de 103 pages, à imprimer ou à garder sur ta tablette.

Voir le livre

  **Zyro te conseille la suite**

 Exercices de maths

Suites réelles et complexes : exercices de maths Maths Sup

 Contrôles de maths

Suites réelles et complexes : contrôle de maths Maths Sup

 QCM de maths

Suites réelles et complexes : QCM de maths Maths Sup

 Exercices de maths

Limites et continuité : exercices de maths Maths Sup

 Exercices de maths

Dérivation et développements limités : exercices de maths Maths Sup

 Contrôles de maths

Limites et continuité : contrôle de maths Maths Sup

Zyro vous emmène sur nos sites partenaires

Embarquez pour d'autres planètes du savoir et leurs applis.

Décollage