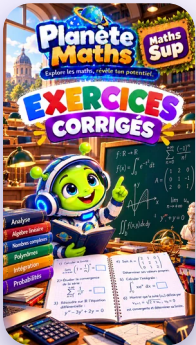


Suites réelles et complexes : exercices corrigés de maths Maths Sup à télécharger en PDF



Le livre d'exercices corrigés de maths Maths Sup

Tout le programme en un seul PDF de 134 pages, à imprimer ou à garder sur ta tablette.

[Voir le livre](#)

Corrigés rédigés des exercices du chapitre. Vérifie chaque étape, puis corrige-toi.

1 Un rang à partir duquel c'est proche



a. $u_n - 4 = \frac{4n - 3 - 4(n + 5)}{n + 5} = \frac{-23}{n + 5}.$

b. Donc $|u_n - 4| = \frac{23}{n + 5}$, qui tend vers 0 : $u_n \rightarrow 4$.

c. $\frac{23}{n + 5} < 0,01 \iff n + 5 > 2300 \iff n > 2295$. Pour $n = 2295$, on obtient exactement 0,01, qui n'est pas strictement inférieur. Le plus petit rang est donc $N = 2296$.

2 Quatre limites à calculer



- a. On factorise n^2 : $a_n = \frac{5 - 1/n + 2/n^2}{2 + 3/n^2} \rightarrow \frac{5}{2}$.
- b. Par quantité conjuguée, $b_n = \frac{3}{\sqrt{n+3} + \sqrt{n}} \rightarrow 0$.
- c. $|c_n| = \frac{1}{n+1} \rightarrow 0$, donc $c_n \rightarrow 0$.
- d. $d_n = n^3(1 - 4/n)$ avec $n^3 \rightarrow +\infty$ et $1 - 4/n \rightarrow 1$: $d_n \rightarrow +\infty$.

3 Vrai ou faux ?



- a. **Faux** : $((-1)^n)$ est bornée par 1 mais diverge.
- b. **Vrai** : si $u_n \rightarrow \ell$, à partir d'un rang N on a $|u_n| \leq |\ell| + 1$; il reste un nombre fini de termes, donc le maximum de $|u_0|, \dots, |u_{N-1}|, |\ell| + 1$ borne la suite.
- c. **Vrai** : si $|v_n| \leq M$, alors $|u_n v_n| \leq M|u_n| \rightarrow 0$; on conclut par encadrement.
- d. **Faux** : $u_n = 1 - \frac{1}{n+1}$ est croissante mais converge vers 1.

4 Encadrer pour conclure



- a. Comme $|\sin n| \leq 1$, on a $|p_n| \leq \frac{1}{n^2 + 1}$, qui tend vers 0. Donc $p_n \rightarrow 0$.
- b. On a $-1 \leq (-1)^n \leq 1$, donc $2 - \frac{1}{n} \leq q_n \leq 2 + \frac{1}{n}$. Les deux bornes tendent vers 2 : $q_n \rightarrow 2$ (théorème d'encadrement).

5 Monotonie et convergence



$$\text{a. } u_{n+1} - u_n = \frac{3(n+1)}{n+3} - \frac{3n}{n+2} = 3 \frac{(n+1)(n+2) - n(n+3)}{(n+2)(n+3)} = \frac{6}{(n+2)(n+3)}$$

$$\text{b. } 3 - u_n = \frac{3n+6-3n}{n+2} = \frac{6}{n+2} > 0.$$

c. La suite est croissante et majorée par **3** : elle converge. Comme

$$3 - u_n = \frac{6}{n+2} \rightarrow 0, \text{ sa limite est } 3.$$

6 Une suite qui explose



$$\text{a. } u_1 = 11, u_2 = 29, u_3 = 83, u_4 = 245.$$

b. $\ell = 3\ell - 4$ donne $\ell = 2$. La suite $v_n = u_n - 2$ vérifie $v_{n+1} = 3v_n$ et $v_0 = 3$, donc $u_n = 2 + 3 \times 3^n = 2 + 3^{n+1}$. Contrôle : $u_4 = 2 + 243 = 245$.

c. Comme $3^{n+1} \rightarrow +\infty$, $u_n \rightarrow +\infty$ (ici $|a| = 3 > 1$ et $u_0 \neq \ell$).

7 Une suite complexe simple



$$\text{a. } \operatorname{Re} z_n = \frac{2n+1}{n+2} \rightarrow 2 \text{ et } \operatorname{Im} z_n = \frac{(-1)^n}{n} \rightarrow 0.$$

b. Les parties réelle et imaginaire convergent : $z_n \rightarrow 2 + 0i = 2$.

$$\text{c. } z_n - 2 = \frac{2n+1-2n-4}{n+2} + \frac{(-1)^n}{n}i = \frac{-3}{n+2} + \frac{(-1)^n}{n}i, \text{ donc}$$
$$|z_n - 2|^2 = \frac{9}{(n+2)^2} + \frac{1}{n^2}, \text{ qui tend vers } 0 : \text{ on retrouve } z_n \rightarrow 2.$$

8 Tendre vers l'infini par comparaison



- a. Comme $\cos n \geq -1$, on a $u_n \geq n - 5$. Or $n - 5 \rightarrow +\infty$, donc $u_n \rightarrow +\infty$ par minoration.
- b. $v_n = 3^n \left(1 - \left(\frac{2}{3}\right)^n\right)$. Pour $n \geq 1$, $\left(\frac{2}{3}\right)^n \leq \frac{2}{3}$, donc $1 - \left(\frac{2}{3}\right)^n \geq \frac{1}{3}$ et $v_n \geq 3^{n-1} \rightarrow +\infty$. Donc $v_n \rightarrow +\infty$.

9 Une somme prise en sandwich



- a. Pour $1 \leq k \leq n$, $n^2 + 1 \leq n^2 + k \leq n^2 + n$, d'où $\frac{k}{n^2 + n} \leq \frac{k}{n^2 + k} \leq \frac{k}{n^2 + 1}$.
- b. On somme, avec $\sum_{k=1}^n k = \frac{n(n+1)}{2}$: $\frac{n(n+1)}{2(n^2+n)} \leq S_n \leq \frac{n(n+1)}{2(n^2+1)}$. Le membre de gauche vaut exactement $\frac{1}{2}$; celui de droite vaut $\frac{1}{2} \times \frac{1+1/n}{1+1/n^2} \rightarrow \frac{1}{2}$. Par encadrement, $S_n \rightarrow \frac{1}{2}$.

10 Suites adjacentes par alternance



- a. $a_{n+1} - a_n = S_{2n+2} - S_{2n} = \frac{1}{2n+1} - \frac{1}{2n+2} > 0$, et $b_{n+1} - b_n = S_{2n+3} - S_{2n+1} = -\frac{1}{2n+2} + \frac{1}{2n+3} < 0$.
- b. $b_n - a_n = S_{2n+1} - S_{2n} = \frac{1}{2n+1} \rightarrow 0$.
- c. Les suites (a_n) et (b_n) sont adjacentes, donc convergent vers une même limite ℓ , et $a_n \leq \ell \leq b_n$. Avec $a_1 = S_2 = \frac{1}{2}$ et $b_1 = S_3 = \frac{5}{6}$, on obtient $0,5 \leq \ell \leq 0,84$. La suite (S_n) converge donc vers ℓ (ses sous-suites paire et impaire ont la même limite).

11 Un point fixe parmi deux



a. $x^2 - 5x + 6 = 0$, soit $(x - 2)(x - 3) = 0$: les points fixes sont **2** et **3**.

b. $u_0 = 1$ convient. Si $1 \leq u_n < 2$, comme $x \mapsto \frac{x^2 + 6}{5}$ est croissante sur $[0, +\infty[$,
 $\frac{7}{5} \leq u_{n+1} < \frac{4+6}{5} = 2$, donc $1 \leq u_{n+1} < 2$.

c. $u_{n+1} - u_n = \frac{u_n^2 - 5u_n + 6}{5} = \frac{(u_n - 2)(u_n - 3)}{5} > 0$ car $u_n - 2 < 0$ et $u_n - 3 < 0$. La suite est croissante et majorée par **2** : elle converge vers un point fixe $\ell \in [1, 2]$. Seul **2** convient : $u_n \rightarrow 2$.

12 Équivalents usuels



a. $a_n = n^2 \left(1 + \frac{3}{n} - \frac{1}{n^2} \right) \sim n^2$. Le quotient est équivalent à $\frac{n^2}{2n^2} = \frac{1}{2}$, donc sa limite est $\frac{1}{2}$.

b. $\sqrt{n+4} - \sqrt{n} = \frac{4}{\sqrt{n+4} + \sqrt{n}}$. Le rapport avec $\frac{2}{\sqrt{n}}$ vaut
 $\frac{2\sqrt{n}}{\sqrt{n+4} + \sqrt{n}} = \frac{2}{\sqrt{1+4/n} + 1} \rightarrow 1$.

c. $\sin \frac{3}{n} \sim \frac{3}{n}$, donc $n \sin \frac{3}{n} \sim 3$ et la limite est **3**.

13 Une suite arithmético-géométrique et sa précision



a. $\ell = \frac{1}{4}\ell + 3$ donne $\ell = 4$. Avec $v_n = u_n - 4$, $v_0 = -8$ et $v_{n+1} = \frac{1}{4}v_n$, d'où
 $u_n = 4 - 8\left(\frac{1}{4}\right)^n$. Contrôle : $u_1 = -1 + 3 = 2 = 4 - 2$.

b. $\left(\frac{1}{4}\right)^n \rightarrow 0$, donc $u_n \rightarrow 4$.

c. $|u_n - 4| = \frac{8}{4^n} < 10^{-3} \iff 4^n > 8000$. Comme $4^6 = 4096$ et $4^7 = 16384$, le premier rang est $n = 7$.

14 Une suite complexe qui spirale



a. $z_1 = \frac{1+i}{2} \times 2 + 1 = 2 + i$. Puis

$$z_2 = \frac{(1+i)(2+i)}{2} + 1 = \frac{1+3i}{2} + 1 = \frac{3}{2} + \frac{3}{2}i.$$

b. $\ell = \frac{1}{1 - \frac{1+i}{2}} = \frac{2}{1-i} = \frac{2(1+i)}{2} = 1 + i$.

c. $z_{n+1} - \ell = \frac{1+i}{2}(z_n - \ell)$, et $\left| \frac{1+i}{2} \right| = \frac{\sqrt{2}}{2}$. Par récurrence,

$$|z_n - \ell| = \left(\frac{\sqrt{2}}{2} \right)^n |1 - i|. \text{ Comme } \frac{\sqrt{2}}{2} < 1, \text{ cette quantité tend vers } 0 :$$

$z_n \rightarrow 1 + i$, ce que montre la spirale de la figure.

15 Somme des carrés et équivalent



a. $n + 1 \sim n$ et $2n + 1 \sim 2n$, donc par produit $S_n \sim \frac{n \cdot n \cdot 2n}{6} = \frac{n^3}{3}$.

b. $\frac{S_n}{n^3} \sim \frac{1}{3}$, donc $\frac{S_n}{n^3} \rightarrow \frac{1}{3}$. Puis $\frac{S_n}{n^4} \sim \frac{1}{3n} \rightarrow 0$.

16 Deux sous-suites, une divergence



a. $|u_n| = 1 + \frac{1}{n} \leq 2$.

b. $u_{2n} = 1 + \frac{1}{2n} \rightarrow 1$ et $u_{2n+1} = -\left(1 + \frac{1}{2n+1}\right) \rightarrow -1$.

c. Deux sous-suites ont des limites différentes : (u_n) **diverge**. Cela ne contredit pas Bolzano-Weierstrass, qui garantit seulement qu'une sous-suite converge : par exemple (u_{2n}) , qui converge vers 1.

17 Une récurrence décroissante



a. $u_1 = \frac{1}{2}, u_2 = \frac{2}{3}, u_3 = \frac{3}{5}, u_4 = \frac{5}{8}, u_5 = \frac{8}{13}$ (quotients de termes consécutifs de la suite de Fibonacci).

b. La fonction $f(x) = \frac{1}{1+x}$ est décroissante sur $\mathbb{R}_+$ et $f\left(\left[\frac{1}{2}, 1\right]\right) = \left[\frac{1}{2}, \frac{2}{3}\right] \subset \left[\frac{1}{2}, 1\right]$.
Comme $u_0 = 1$ appartient à l'intervalle, tous les termes y restent.

c. On a $\ell = \frac{1}{1+\ell}$, donc $u_{n+1} - \ell = \frac{1}{1+u_n} - \frac{1}{1+\ell} = \frac{\ell - u_n}{(1+u_n)(1+\ell)}$. Avec $u_n \geq \frac{1}{2}$ et $1+\ell \geq 1,6$, le dénominateur dépasse $1,5 \times 1,6 = 2,4 > 2$, d'où $|u_{n+1} - \ell| \leq \frac{1}{2} |u_n - \ell|$. Par récurrence, $|u_n - \ell| \leq \frac{1}{2^n} |u_0 - \ell| \rightarrow 0$, donc $u_n \rightarrow \ell \approx 0,618$.

18 Limite par équivalents et logarithme



a. Comme $\frac{2}{n} \rightarrow 0$, on compose l'équivalent usuel avec la suite $x_n = \frac{2}{n}$:
 $\ln(1+x_n) \sim x_n$.

b. $\left(1 + \frac{2}{n}\right)^n = \exp\left(n \ln\left(1 + \frac{2}{n}\right)\right)$. Or $n \ln\left(1 + \frac{2}{n}\right) \sim n \times \frac{2}{n} = 2$, donc cette quantité tend vers 2. Par continuité de l'exponentielle, la limite est e^2 .

c. $\sqrt{n^2+n} - n = \frac{n}{\sqrt{n^2+n} + n} = \frac{1}{\sqrt{1+1/n} + 1} \rightarrow \frac{1}{2}$.

19 Une récurrence avec second membre variable



a. $u_1 = 2 - 0 + 1 = 3, u_2 = 6 - 1 + 1 = 6, u_3 = 12 - 2 + 1 = 11$.

b. $v_{n+1} = u_{n+1} - (n+1) = 2u_n - n + 1 - n - 1 = 2u_n - 2n = 2(u_n - n) = 2v_n$,
et $v_0 = 1$.

c. $v_n = 2^n$, donc $u_n = 2^n + n$. Contrôle : $u_3 = 8 + 3 = 11$. Comme $n = o(2^n)$ (croissances comparées), $u_n \sim 2^n$.

20 Deux moyennes qui se rejoignent



a. $a_1 = 3, b_1 = 5, a_2 = \sqrt{15} \approx 3,873, b_2 = 4$.

b. Par récurrence, $a_n, b_n > 0$. Pour tout n , $b_{n+1} - a_{n+1} = \frac{(\sqrt{b_n} - \sqrt{a_n})^2}{2} \geq 0$

(inégalité entre moyennes), et $a_0 \leq b_0$: donc $a_n \leq b_n$ pour tout n . Alors

$$a_{n+1} = \sqrt{a_n b_n} \geq \sqrt{a_n a_n} = a_n \text{ et } b_{n+1} = \frac{a_n + b_n}{2} \leq \frac{b_n + b_n}{2} = b_n.$$

c. $b_{n+1} - a_{n+1} = \frac{(\sqrt{b_n} - \sqrt{a_n})^2}{2} \leq \frac{(\sqrt{b_n} - \sqrt{a_n})(\sqrt{b_n} + \sqrt{a_n})}{2} = \frac{b_n - a_n}{2}$. Donc $0 \leq b_n - a_n \leq \frac{8}{2^n} \rightarrow 0$: les suites sont adjacentes. Leur limite ℓ vérifie $a_2 \leq \ell \leq b_2$, soit $3,87 < \ell < 4$.

21 Puissances d'un nombre complexe



a. $|\sqrt{3} + i| = \sqrt{3 + 1} = 2$, donc $|z_n| = \left(\frac{2}{3}\right)^n \rightarrow 0$. Par la caractérisation par le module, $z_n \rightarrow 0$.

b. $\frac{1+i}{\sqrt{2}} = e^{i\pi/4}$, donc $w_n = e^{in\pi/4}$. On obtient $w_{8k} = e^{2ik\pi} = 1$ et $w_{8k+4} = e^{2ik\pi + i\pi} = -1$. Deux sous-suites ont des limites différentes (1 et -1) : (w_n) diverge, bien que $|w_n| = 1$ soit bornée.

Le livre d'exercices corrigés de maths Maths Sup

Tout le programme en un seul PDF de 134 pages, à imprimer ou à garder sur ta tablette.

Voir le livre

 Exercices de maths

Suites réelles et complexes : exercices de maths Maths Sup

 QCM de maths

Suites réelles et complexes : QCM de maths Maths Sup

 Contrôles de maths

Suites réelles et complexes : contrôle de maths Maths Sup

 Exercices de maths

Limites et continuité : exercices de maths Maths Sup

 Exercices de maths

Dérivation et développements limités : exercices de maths Maths Sup

 QCM de maths

Limites et continuité : QCM de maths Maths Sup

Zyro vous emmène sur nos sites partenaires

Embarquez pour d'autres planètes du savoir et leurs applis.

Décollage