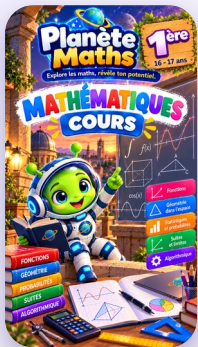


Suites numériques et récurrence : cours de maths Terminale à télécharger en PDF



Le livre de cours de maths Terminale

Tout le programme en un seul PDF de 103 pages, à imprimer ou à garder sur ta tablette.

[Voir le livre](#)

Un capital qui grossit chaque année, une population qui s'effondre, une batterie qui s'use : tous ces phénomènes se décrivent par une **suite de nombres**, rangés dans l'ordre. En Terminale, tu apprends à répondre à trois questions : quelle est la **formule** du terme général, la suite **monte-t-elle ou descend-elle**, et **où va-t-elle** quand n devient immense ? Pour tout démontrer proprement, tu vas aussi maîtriser le **raisonnement par récurrence**.

1. Le raisonnement par récurrence

P

Principe de récurrence

Soit $P(n)$ une propriété dépendant d'un entier n . Si les deux conditions suivantes sont remplies :

- **initialisation** : $P(n_0)$ est vraie ;
- **hérédité** : pour tout entier $n \geq n_0$, « $P(n)$ vraie » entraîne « $P(n+1)$ vraie » ;

alors $P(n)$ est vraie pour tout entier $n \geq n_0$.

Pense à une longue rangée de dominos : si le premier tombe (initialisation) et si chaque domino qui tombe fait tomber le suivant (hérédité), alors tous les dominos tombent. Dans l'hérédité, on **suppose** $P(n)$ pour un entier n fixé quelconque (c'est l'*hypothèse de récurrence*) et on démontre $P(n+1)$.

E

Exemple 1

Démontrons que, pour tout entier $n \geq 0$, $5^n \geq 4n + 1$.

Initialisation. Pour $n = 0$: $5^0 = 1$ et $4 \times 0 + 1 = 1$, donc $1 \geq 1$ est vrai.

Hérédité. Supposons $5^n \geq 4n + 1$ pour un entier n . Alors

$5^{n+1} = 5 \times 5^n \geq 5(4n + 1) = 20n + 5$. Or $20n + 5 \geq 4n + 5 = 4(n + 1) + 1$ puisque $16n \geq 0$. Donc $5^{n+1} \geq 4(n + 1) + 1$.

Conclusion. La propriété est vraie pour tout $n \geq 0$.



Initialisation indispensable

Considère « $10^n + 1$ est divisible par 9 ». L'hérédité marche :

$10^{n+1} + 1 = 10(10^n + 1) - 9$. Pourtant la propriété est fausse pour $n = 0$ (le nombre 2 n'est pas divisible par 9), et donc fausse pour tout n . Une hérédité seule ne prouve rien.



Astuce de Zyro

Sur ma planète, on écrit toujours la phrase « supposons $P(n)$ vraie » avant de démarrer l'hérédité, et on repère où on se sert de cette hypothèse. Si tu ne l'utilises jamais, ton raisonnement n'est pas une récurrence !

2. Suites arithmétiques et géométriques

Une suite (u_n) associe à chaque entier n un réel u_n . Deux familles se démontrent et se calculent à la perfection.

Définition

$$u_{n+1} = u_n + r$$

$$u_{n+1} =$$

Terme

général

$$u_n = u_0 + nr$$

$$u_n =$$

Somme

$$u_0 + \dots + u_n = (n + 1) \times \frac{u_0 + u_n}{2}$$

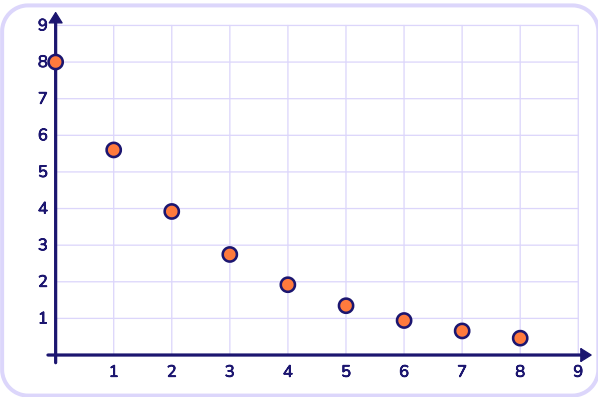
$$1 + q + \dots +$$

$(q :$

Variation

croissante si $r > 0$, décroissante si $r < 0$

pour $u_0 > 0$
 $q > 1$, déc
 $0 <$



Le nuage de points ci-dessus représente la suite géométrique $u_n = 8 \times 0,7^n$: les points sont en « escalier descendant » et s'écrasent vers l'axe des abscisses.

E**Exemple 2**

Une plante mesure **120** mm et pousse de **15** mm par semaine : (u_n) est arithmétique de raison **15**, donc $u_{20} = 120 + 20 \times 15 = 420$ mm. Une batterie de **60** kWh perd **4 %** de sa capacité chaque année : $C_n = 60 \times 0,96^n$ (suite géométrique de raison **0,96**), donc $C_5 = 60 \times 0,96^5 \approx 48,9$ kWh.

3. Sens de variation d'une suite**D****Suite croissante, décroissante**

La suite (u_n) est **croissante** si $u_{n+1} \geq u_n$ pour tout n , **décroissante** si $u_{n+1} \leq u_n$ pour tout n , et **monotone** si elle est l'un ou l'autre.

M**Trois méthodes**

1. Étudier le **signe de** $u_{n+1} - u_n$.
2. Si tous les termes sont strictement positifs, comparer $\frac{u_{n+1}}{u_n}$ à **1**.
3. Si $u_n = f(n)$ avec f monotone sur $[0; +\infty[$, la suite a le même sens de variation que f .

E

Exemple 3

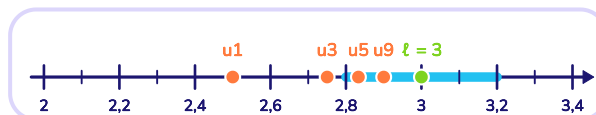
Soit $u_n = n^2 - 8n$. Alors $u_{n+1} - u_n = (n+1)^2 - 8(n+1) - n^2 + 8n = 2n - 7$. Cette différence est négative pour $n \leq 3$ et positive pour $n \geq 4$: la suite décroît jusqu'au rang 3, puis croît à partir du rang 4. Elle n'est donc pas monotone sur $\mathbb{N}$, mais elle est croissante à partir du rang 4.

4. Limite d'une suite

D

Limite finie, limite infinie

La suite (u_n) **converge vers** ℓ si tout intervalle ouvert contenant ℓ contient tous les termes à partir d'un certain rang. Elle **tend vers** $+\infty$ si, pour tout réel A , tous les termes sont supérieurs à A à partir d'un certain rang. Une suite qui ne converge pas est dite **divergente**.



Sur la figure, la suite $u_n = 3 - \frac{1}{n+1}$ se rapproche de 3 : à partir de u_5 , tous les termes sont dans l'intervalle $]2,8 ; 3,2[$. Si on choisit un intervalle plus étroit, il faudra attendre un rang plus grand, mais il existera toujours.

P

Limites de référence et suite q^n

$\lim n = \lim n^2 = \lim \sqrt{n} = +\infty$ et $\lim \frac{1}{n} = \lim \frac{1}{n^2} = \lim \frac{1}{\sqrt{n}} = 0$. Pour q^n : si $q > 1$, la limite est $+\infty$; si $-1 < q < 1$, la limite est 0 ; si $q \leq -1$, la suite n'a pas de limite.

Les limites se combinent par somme, produit et quotient comme pour les fonctions. Quatre cas sont des **formes indéterminées** : « $\infty - \infty$ », « $0 \times \infty$ », « $\frac{\infty}{\infty}$ » et « $\frac{0}{0}$ ». Pour les lever, on **factorise le terme dominant**.

E Exemple 4

Pour $u_n = \frac{3n^2 + n}{n^2 + 5}$, le quotient est de la forme « $\frac{\infty}{\infty}$ ». On factorise :
$$u_n = \frac{n^2 \left(3 + \frac{1}{n}\right)}{n^2 \left(1 + \frac{5}{n^2}\right)} = \frac{3 + \frac{1}{n}}{1 + \frac{5}{n^2}}.$$
 Le numérateur tend vers **3**, le dénominateur vers **1** :
 $\lim u_n = 3.$

5. Comparaison et théorème des gendarmes

P Théorèmes de comparaison

Si $u_n \geq v_n$ à partir d'un certain rang et $\lim v_n = +\infty$, alors $\lim u_n = +\infty$. Si $u_n \leq v_n$ à partir d'un certain rang et $\lim v_n = -\infty$, alors $\lim u_n = -\infty$.

Théorème des gendarmes : si $v_n \leq u_n \leq w_n$ à partir d'un certain rang et si $\lim v_n = \lim w_n = \ell$, alors u_n converge et $\lim u_n = \ell$.

E

Exemple 5

(a) Pour $u_n = n^2 + 3 \cos n$, comme $\cos n \geq -1$, on a $u_n \geq n^2 - 3$, et $n^2 - 3 \rightarrow +\infty$: donc $\lim u_n = +\infty$.

(b) Pour $u_n = \frac{2n + (-1)^n}{n + 3}$, on encadre $(-1)^n$ entre -1 et 1 :
 $\frac{2n - 1}{n + 3} \leq u_n \leq \frac{2n + 1}{n + 3}$. Les deux bornes tendent vers 2 (on divise par n), donc $\lim u_n = 2$.

Suites numériques Terminale : les termes de la suite $(2n + (-1)^n)/(n+3)$ enserrés entre deux suites qui convergent vers 2, illustration du théorème des gendarmes

6. Suites monotones bornées

D

Suite majorée, minorée, bornée

La suite (u_n) est **majorée** s'il existe un réel M tel que $u_n \leq M$ pour tout n , **minorée** s'il existe m tel que $u_n \geq m$, et **bornée** si elle est les deux.

P Théorème de convergence monotone

Toute suite **croissante et majorée** converge. Toute suite **décroissante et minorée** converge. Une suite croissante non majorée tend vers $+\infty$.

A Ce que le théorème ne dit pas

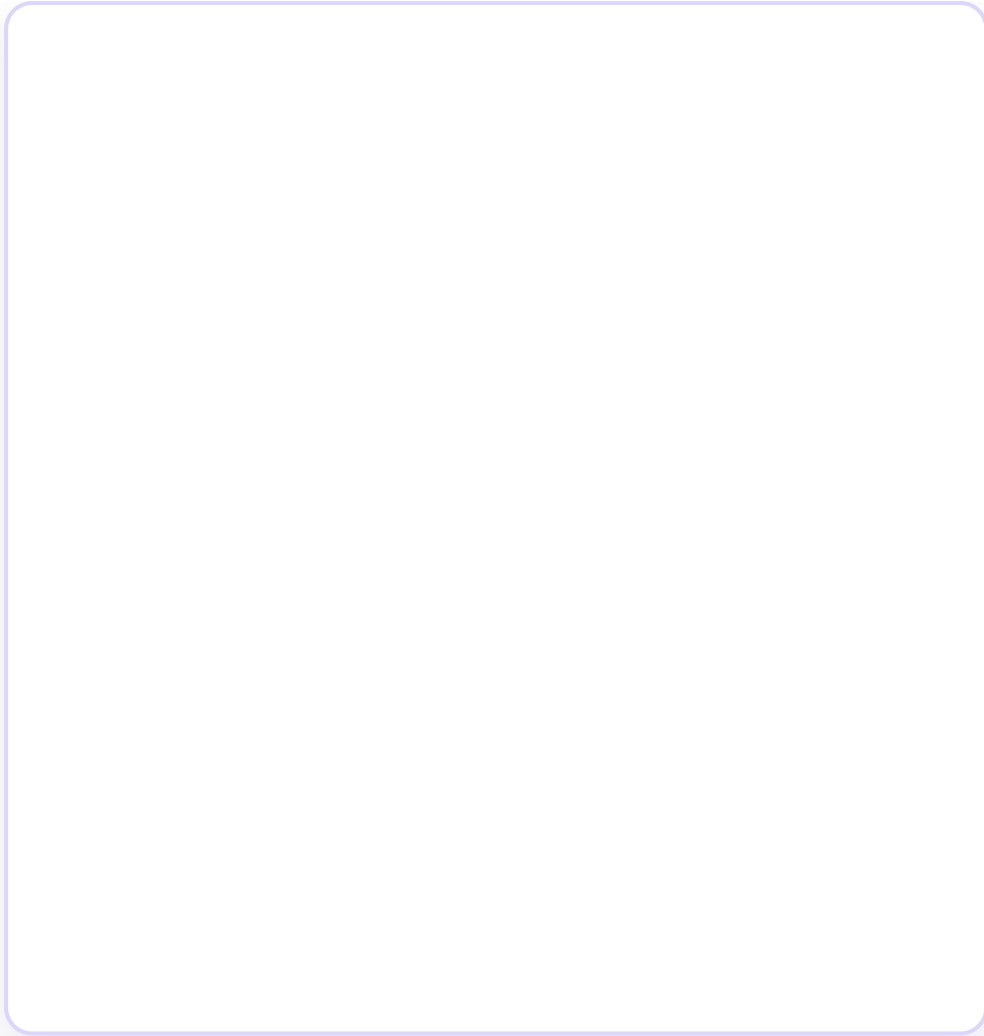
Il garantit l'existence d'une limite, pas sa valeur. Si $u_n \leq M$, la limite ℓ vérifie $\ell \leq M$, mais pas forcément $\ell = M$. Et « bornée » ne suffit pas sans monotonie : $(-1)^n$ est bornée et diverge.

E Exemple 6

Soit $u_n = \frac{5n+2}{n+1} = 5 - \frac{3}{n+1}$. Alors
 $u_{n+1} - u_n = \frac{5n+3}{n+2} - \frac{5n+2}{n+1} = \frac{3}{(n+1)(n+2)} > 0$: la suite est croissante. De plus $u_n < 5$: elle est majorée. Elle converge donc ; ici on voit même que sa limite est 5.

I 7. Suites définies par $u_{n+1} = f(u_n)$

Quand le terme suivant se calcule avec le précédent, on visualise la suite par une **toile d'araignée** : on part de u_0 sur l'axe, on monte à la courbe de f , on rejoint la droite $y = x$, et on recommence.



Suites numériques Terminale : toile d'araignée de la suite $u_{n+1} = \text{racine de } (2 u(n) + 3)$ partant de $u_0 = 1$,
les termes croissent vers le point fixe 3

P **Limite et point fixe**

Si (u_n) converge vers ℓ et si f est continue en ℓ , alors ℓ vérifie $f(\ell) = \ell$.

M**Méthode**

1. Conjecturer le comportement (calculatrice, toile d'araignée).
2. Démontrer par récurrence que les termes restent dans un intervalle bien choisi.
3. Démontrer la monotonie (signe de $f(u_n) - u_n$).
4. Conclure à la convergence, puis résoudre $f(\ell) = \ell$ et garder la solution qui appartient à l'intervalle.

E**Exemple 7**

Soit $u_0 = 1$ et $u_{n+1} = \sqrt{2u_n + 3}$. La fonction $f(x) = \sqrt{2x + 3}$ est croissante sur $[0; 3]$ et $f(3) = 3$.

Bornes. Montrons que $0 \leq u_n \leq 3$. C'est vrai pour $n = 0$. Si $0 \leq u_n \leq 3$, alors $f(0) \leq u_{n+1} \leq f(3)$, soit $\sqrt{3} \leq u_{n+1} \leq 3$, ce qui prouve la propriété au rang $n + 1$.

Monotonie.

$$u_{n+1} - u_n = \sqrt{2u_n + 3} - u_n = \frac{2u_n + 3 - u_n^2}{\sqrt{2u_n + 3} + u_n} = \frac{(3 - u_n)(u_n + 1)}{\sqrt{2u_n + 3} + u_n} \geq 0.$$
 La suite est croissante.

Limite. Croissante et majorée, elle converge vers ℓ avec $\ell = \sqrt{2\ell + 3}$, soit $\ell^2 - 2\ell - 3 = 0$, d'où $\ell = 3$ ou $\ell = -1$. Comme $\ell \geq 0$, $\ell = 3$.

8. Algorithmes de seuil

Pour trouver le **premier rang** à partir duquel une suite passe un seuil, on utilise une boucle **while** qui calcule les termes u_n à un.

E**Exemple 8**

Une réserve contient **800** litres et en perd **4 %** chaque jour : $u_n = 800 \times 0,96^n$. On cherche le premier jour où il reste moins de **500** litres.

u = 800

n = 0

while u >= 500 :

u = 0.96 * u

n = n + 1

À la fin, **n** est le plus petit entier tel que $u_n < 500$. Ici $u_{11} \approx 510,6$ et $u_{12} \approx 490,2$, donc le programme affiche **n = 12**.

**Danger : boucle infinie**

Si la suite converge vers une limite qui n'atteint jamais le seuil (par exemple chercher $u_n > 4$ pour une suite qui tend vers **3**), la boucle ne s'arrête jamais. Avant d'écrire l'algorithme, vérifie que le seuil sera franchi.

À retenir

- **Récurrence** : initialisation, hérédité (on utilise l'hypothèse), conclusion. Les deux premières étapes sont indispensables.
- Arithmétique : $u_n = u_0 + nr$. Géométrique : $u_n = u_0 q^n$, avec $\lim q^n = 0$ si $-1 < q < 1$ et $+\infty$ si $q > 1$.
- Pour la monotonie : signe de $u_{n+1} - u_n$, ou comparaison du quotient à 1 pour des termes positifs.
- Formes indéterminées : on factorise le terme dominant ou on multiplie par la quantité conjuguée.
- **Gendarmes** : encadrement par deux suites de même limite. **Comparaison** : minorer par une suite qui tend vers $+\infty$.
- Croissante majorée (ou décroissante minorée) : **converge**. Pour $u_{n+1} = f(u_n)$, la limite vérifie $f(\ell) = \ell$.
- Seuil : boucle **while** ; attention à ne pas viser un seuil que la suite ne franchit jamais.

Le livre de cours de maths Terminale

Tout le programme en un seul PDF de 103 pages, à imprimer ou à garder sur ta tablette.

Voir le livre



Entraîne-toi : défi express de Terminale

Changer de niveau

Niveau : **Terminale**

6 questions au hasard, correction tout de suite.



Lancer le défi



Zyro te conseille la suite



Exercices de maths

Suites numériques et récurrence :
exercices de maths Terminale



Contrôles de maths

Suites numériques et récurrence :
contrôle de maths Terminale



QCM de maths

Suites numériques et récurrence : QCM
de maths Terminale



Exercices de maths

Limites de fonctions : exercices de maths
Terminale

 Exercices de maths

Continuité et théorème des valeurs
intermédiaires : exercices de maths
Terminale

 Contrôles de maths

Limites de fonctions : contrôle de maths
Terminale

Zyro vous emmène sur nos sites partenaires

Embarquez pour d'autres planètes du savoir et leurs applis.

Décollage