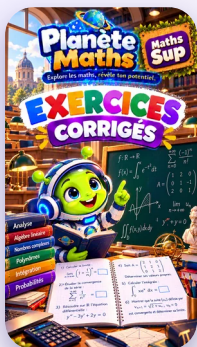


Groupes, anneaux et corps : exercices de maths Maths Sup à télécharger en PDF



Le livre d'exercices corrigés de maths Maths Sup

Tout le programme en un seul PDF de 134 pages, à imprimer ou à garder sur ta tablette.

[Voir le livre](#)

22 exercices classés par difficulté (★ facile, ★★ moyen, ★★★ difficile). Cherche d'abord sans regarder le corrigé !

1 Une loi sur les entiers

★ ★ ★

Sur $\mathbb{Z}$, on définit $a \star b = a + b - 4$.

- La loi est-elle commutative ? associative ?
- Détermine son élément neutre.
- Quel est le symétrique de 10 ? Calcule $9 \star (-2)$.

2 Calculer modulo 7

★ ★ ★

Dans $\mathbb{Z}/7\mathbb{Z}$, donne le représentant dans $\{0, \dots, 6\}$ de : $5 + 4$; 3×6 ; l'opposé de 2 ; l'inverse de 3 ; 6^{10} .

3 Groupe ou pas ?



Parmi les structures suivantes, lesquelles sont des groupes ? Justifie chaque réponse : $(\mathbb{N}, +)$; $(\mathbb{Z}, \times)$; $(\mathbb{Q}^*, \times)$; $(\mathbb{R}_+^*, \times)$; $(\mathbb{Z}, -)$.

4 Sous-groupe ou non ?



Dire si c'est un sous-groupe : (a) $5\mathbb{Z}$ dans $(\mathbb{Z}, +)$; (b) $\mathbb{N}$ dans $(\mathbb{Z}, +)$; (c) $2\mathbb{Z} \cup 3\mathbb{Z}$ dans $(\mathbb{Z}, +)$; (d) $\{-1, 1\}$ dans $(\mathbb{R}^*, \times)$.

5 Sommes et produits à la main



Calcule : $\sum_{k=1}^{20} k$; $\sum_{k=0}^6 2^k$; $\sum_{k=1}^5 k^2$; $\prod_{k=1}^5 k$; $\sum_{k=3}^8 2k$.

6 Coefficients binomiaux



Calcule $\binom{7}{3}$, $\binom{10}{2}$, $\binom{9}{9}$, $\binom{8}{5}$, $\binom{12}{1}$. Vérifie la relation de Pascal pour $\binom{8}{3} + \binom{8}{4}$.

7 Développer avec le binôme



Développe $(a + b)^5$ puis $(x + 2)^4$.

8 Une loi sur les réels privés d'un point



Sur $E = \mathbb{R} \setminus \{\frac{1}{2}\}$, on pose $x \star y = x + y - 2xy$.

- Calcule $1 - 2(x \star y)$ en fonction de $1 - 2x$ et $1 - 2y$.
- En déduire que $(E, \star)$ est un groupe abélien.
- Quel est le symétrique de 3 ? Résous $4 \star x = 1$.

9

Intersection et somme de sous-groupes

★★★

Dans $(\mathbb{Z}, +)$, détermine $12\mathbb{Z} \cap 18\mathbb{Z}$ et $12\mathbb{Z} + 18\mathbb{Z}$. Montre que $12\mathbb{Z} \cup 18\mathbb{Z}$ n'est pas un sous-groupe.

10

Est-ce un morphisme ?

★★★

Étudie les applications suivantes : $f : (\mathbb{Z}, +) \rightarrow (\mathbb{Z}, +), n \mapsto 5n$;
 $g : (\mathbb{Z}, +) \rightarrow (\mathbb{Z}, +), n \mapsto n + 1$; $h : (\mathbb{R}^*, \times) \rightarrow (\mathbb{R}^*, \times), x \mapsto x^2$. Pour chaque morphisme, donne noyau et image.

11

Réduction modulo

★★★

Soit $\varphi : \mathbb{Z}/12\mathbb{Z} \rightarrow \mathbb{Z}/4\mathbb{Z}$ qui à la classe de x modulo **12** associe sa classe modulo **4** (bien définie car **4** divise **12**). Montre que φ est un morphisme de groupes, détermine son noyau, son image, et vérifie la relation entre les cardinaux.

12

Ordres dans $\mathbb{Z}/12\mathbb{Z}$

★★★

Détermine l'ordre dans $(\mathbb{Z}/12\mathbb{Z}, +)$ des éléments **8**, **5**, **9** et **6**. Combien d'éléments sont d'ordre **12** ?

13

Inversibles de $\mathbb{Z}/10\mathbb{Z}$

★★★

Liste les éléments inversibles de l'anneau $\mathbb{Z}/10\mathbb{Z}$ et donne leurs inverses. L'anneau est-il un corps ?

14 Somme et produit télescopiques



Montre que $\sum_{k=1}^n \frac{1}{k(k+1)} = \frac{n}{n+1}$ en écrivant $\frac{1}{k(k+1)}$ comme une différence. Calcule la somme pour $n = 99$. Calcule aussi $\prod_{k=1}^{49} \left(1 + \frac{1}{k}\right)$.

15 Décomposer une permutation



Dans S_6 , on considère $\sigma = (3, 6, 1, 5, 2, 4)$ (c'est-à-dire $\sigma(1) = 3, \sigma(2) = 6$, etc.).

- Décompose σ en cycles à supports disjoints.
- Donne sa signature et son ordre.
- Calcule σ^2 puis σ^{2026} .

16 Un groupe dont tous les éléments sont d'ordre 2



Soit $(G, \star)$ un groupe dans lequel $x \star x = e$ pour tout x . Montre que G est abélien. Donne un exemple de tel groupe non réduit à $\{e\}$.

17 L'anneau des $a + b\sqrt{2}$



On note $\mathbb{Z}[\sqrt{2}] = \{a + b\sqrt{2} \mid a, b \in \mathbb{Z}\}$.

- Montre que c'est un sous-anneau de $(\mathbb{R}, +, \times)$.
- Montre que $1 + \sqrt{2}$ et $3 + 2\sqrt{2}$ sont inversibles dans cet anneau.
- Calcule $(1 + \sqrt{2})^3$ avec la formule du binôme.
- L'élément 2 est-il inversible dans $\mathbb{Z}[\sqrt{2}]$?

18 Sommes de coefficients binomiaux

★★★★

Soit $n \geq 1$. Calcule, avec la formule du binôme : $\sum_{k=0}^n \binom{n}{k}$, $\sum_{k=0}^n (-1)^k \binom{n}{k}$, $\sum_{k=0}^n \binom{n}{k} 3^k$.

Montre ensuite que $k \binom{n}{k} = n \binom{n-1}{k-1}$ et déduis la valeur de $\sum_{k=0}^n k \binom{n}{k}$; applique-la à $n = 10$.

19 Résoudre dans le corps $\mathbb{Z}/7\mathbb{Z}$

★★★★

(a) Justifie que $\mathbb{Z}/7\mathbb{Z}$ est un corps et dresse la liste des inverses.

(b) Résous $3x + 4 = 2$ dans $\mathbb{Z}/7\mathbb{Z}$ puis $x^2 = 2$.

(c) Dans $\mathbb{Z}/6\mathbb{Z}$, résous $3x = 3$ et explique la différence.

20 Une identité de Vandermonde

★★★★

Démontre que $\sum_{k=0}^n \binom{n}{k}^2 = \binom{2n}{n}$ en comparant les coefficients de x^n dans

$(1+x)^n(1+x)^n = (1+x)^{2n}$. Vérifie pour $n = 4$.

21 Déénombrer dans S_4

★★★★

Dans S_4 , classe les permutations selon le type de leur décomposition en cycles. Combien y a-t-il d'éléments de chaque type ? Combien sont paires ? Combien sont d'ordre 2 ?

22 Une somme double

★★★★

Montre que $\sum_{i=1}^n \sum_{j=1}^n \min(i, j) = \sum_{k=1}^n k^2$. Indication : $\min(i, j) = \sum_{k=1}^n \mathbb{1}_{k \leq i} \mathbb{1}_{k \leq j}$. Vérifie

pour $n = 4$.

Le livre d'exercices corrigés de maths Maths Sup

Tout le programme en un seul PDF de 134 pages, à imprimer ou à garder sur ta tablette.

[Voir le livre](#)

Zyro te conseille la suite

Exercices corrigés de maths

Groupes, anneaux et corps : exercices corrigés de maths Maths Sup

Cours de maths

Groupes, anneaux et corps : cours de maths Maths Sup

QCM de maths

Groupes, anneaux et corps : QCM de maths Maths Sup

Exercices corrigés de maths

Espaces vectoriels et applications linéaires : exercices corrigés de maths Maths Sup

✓ **Exercices corrigés de maths**

Matrices et déterminants : exercices corrigés de maths Maths Sup

■ **Cours de maths**

Espaces vectoriels et applications linéaires : cours de maths Maths Sup

Zyro vous emmène sur nos sites partenaires

Embarquez pour d'autres planètes du savoir et leurs applis.

Décollage