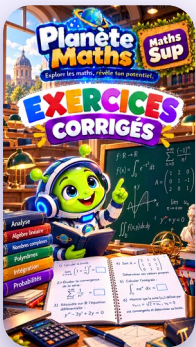


# Groupes, anneaux et corps : exercices corrigés de maths Maths Sup à télécharger en PDF



## Le livre d'exercices corrigés de maths Maths Sup

Tout le programme en un seul PDF de 134 pages, à imprimer ou à garder sur ta tablette.

[Voir le livre](#)

Corrigés rédigés des exercices du chapitre. Vérifie chaque étape, puis corrige-toi.

### 1 Une loi sur les entiers



a.  $a \star b = a + b - 4 = b \star a$  : commutative. De plus

$(a \star b) \star c = a + b - 4 + c - 4 = a + b + c - 8$  et  $a \star (b \star c) = a + b + c - 8$  : associative.

b. On cherche  $e$  avec  $a \star e = a$ , soit  $a + e - 4 = a$ , donc  $e = 4$ .

c. Le symétrique  $a'$  vérifie  $a \star a' = 4$ , soit  $a' = 8 - a$ . Pour  $a = 10$ , on trouve  $-2$  ; vérification :  $10 \star (-2) = 4$ . Enfin  $9 \star (-2) = 9 - 2 - 4 = 3$ .

## 2 Calculer modulo 7



$5 + 4 = 9 = 2$  ;  $3 \times 6 = 18 = 4$  (car  $18 = 14 + 4$ ) ; l'opposé de  $2$  est  $5$  car  $2 + 5 = 7 = 0$  ; l'inverse de  $3$  est  $5$  car  $3 \times 5 = 15 = 1$ .

Enfin  $6 = -1$  donc  $6^{10} = (-1)^{10} = 1$ .

## 3 Groupe ou pas ?



$(\mathbb{N}, +)$  : non,  $1$  n'a pas d'opposé dans  $\mathbb{N}$ .  $(\mathbb{Z}, \times)$  : non,  $2$  n'a pas d'inverse entier.  $(\mathbb{Q}^*, \times)$  : oui, la multiplication est associative,  $1$  est neutre et l'inverse de  $\frac{p}{q}$  est  $\frac{q}{p}$ .  $(\mathbb{R}_+^*, \times)$  : oui, pour la même raison.

$(\mathbb{Z}, -)$  : non, la loi n'est pas associative, car  $(5 - 3) - 1 = 1 \neq 3 = 5 - (3 - 1)$ .

## 4 Sous-groupe ou non ?



(a) Oui :  $0 \in 5\mathbb{Z}$  et la différence de deux multiples de  $5$  est un multiple de  $5$ .

(b) Non :  $1 \in \mathbb{N}$  mais son opposé  $-1 \notin \mathbb{N}$ .

(c) Non :  $2$  et  $3$  sont dedans, mais  $2 + 3 = 5$  n'est multiple ni de  $2$  ni de  $3$ .

(d) Oui :  $1 \in H$ , et  $1 \times 1^{-1} = 1$ ,  $1 \times (-1)^{-1} = -1$ ,  $(-1) \times (-1)^{-1} = 1$ ,  $(-1) \times 1^{-1} = -1$  sont dans  $H$ .

## 5 Sommes et produits à la main



$$\sum_{k=1}^{20} k = \frac{20 \times 21}{2} = 210. \quad \sum_{k=0}^6 2^k = \frac{2^7 - 1}{2 - 1} = 127.$$

$$\sum_{k=1}^5 k^2 = 1 + 4 + 9 + 16 + 25 = 55. \quad \prod_{k=1}^5 k = 5! = 120.$$

$$\text{Enfin } \sum_{k=3}^8 2k = 2(3 + 4 + 5 + 6 + 7 + 8) = 2 \times 33 = 66.$$

## 6 Coefficients binomiaux



$$\binom{7}{3} = \frac{7 \times 6 \times 5}{6} = 35; \binom{10}{2} = \frac{10 \times 9}{2} = 45; \binom{9}{9} = 1; \binom{8}{5} = \binom{8}{3} = 56 \text{ par symétrie; } \binom{12}{1} = 12.$$

$$\text{Pascal : } \binom{8}{3} + \binom{8}{4} = 56 + 70 = 126 = \binom{9}{4}.$$

## 7 Développer avec le binôme



La ligne 5 du triangle de Pascal est 1, 5, 10, 10, 5, 1 donc

$$(a + b)^5 = a^5 + 5a^4b + 10a^3b^2 + 10a^2b^3 + 5ab^4 + b^5.$$

Ligne 4 : 1, 4, 6, 4, 1, donc

$$(x + 2)^4 = x^4 + 4 \cdot 2x^3 + 6 \cdot 4x^2 + 4 \cdot 8x + 16 = x^4 + 8x^3 + 24x^2 + 32x + 16.$$

## 8 Une loi sur les réels privés d'un point



a.  $1 - 2(x + y - 2xy) = 1 - 2x - 2y + 4xy = (1 - 2x)(1 - 2y).$

b. Si  $x, y \neq \frac{1}{2}$ , le produit  $(1 - 2x)(1 - 2y)$  est non nul, donc  $x \star y \neq \frac{1}{2}$  :  $E$  est stable.

La relation du (a) donne  $1 - 2((x \star y) \star z) = (1 - 2x)(1 - 2y)(1 - 2z)$ , symétrique en  $x, y, z$  : la loi est associative. Elle est clairement commutative. Le neutre est 0 car  $x \star 0 = x$ . Le symétrique  $y$  de  $x$  vérifie  $(1 - 2x)(1 - 2y) = 1$ , donc  $y = -\frac{x}{1 - 2x}$ , qui est bien dans  $E$  (car  $1 - 2y = \frac{1}{1 - 2x} \neq 0$ ).

c. Pour  $x = 3$  :  $y = -\frac{3}{-5} = \frac{3}{5}$  ; vérification :  $3 \star \frac{3}{5} = \frac{18}{5} - \frac{18}{5} = 0$ . Ensuite

$$4 \star x = 4 + x - 8x = 4 - 7x = 1 \text{ donne } x = \frac{3}{7}, \text{ et } \frac{3}{7} \neq \frac{1}{2} \text{ donc } \frac{3}{7} \in E.$$

9

## Intersection et somme de sous-groupes

★★★

Un entier est dans l'intersection s'il est multiple commun de **12** et **18**, donc multiple de leur ppcm **36** :  $12\mathbb{Z} \cap 18\mathbb{Z} = 36\mathbb{Z}$ .

La somme  $12\mathbb{Z} + 18\mathbb{Z}$  est un sous-groupe de  $\mathbb{Z}$ , donc de la forme  $n\mathbb{Z}$  ; il contient  $18 - 12 = 6$  et ses éléments sont tous multiples de  $\text{pgcd}(12, 18) = 6$  : c'est  $6\mathbb{Z}$ .

Enfin **12** et **18** sont dans la réunion, mais  $12 + 18 = 30$  n'est multiple ni de **12** ni de **18** : la réunion n'est pas stable pour l'addition.

10

## Est-ce un morphisme ?

★★★

$f(a + b) = 5a + 5b = f(a) + f(b)$  : morphisme.  $\text{Ker } f = \{0\}$ ,  $\text{Im } f = 5\mathbb{Z}$ .

$g(0) = 1 \neq 0$  : un morphisme envoie neutre sur neutre, donc  $g$  n'en est pas un.

$h(xy) = x^2 y^2 = h(x)h(y)$  : morphisme.  $\text{Ker } h = \{x \mid x^2 = 1\} = \{-1, 1\}$ , non réduit au neutre, donc  $h$  n'est pas injectif ;  $\text{Im } h = \mathbb{R}_+^*$ .

11

## Réduction modulo

★★★

$\varphi(\overline{x + y}) = \overline{x + y} \bmod 4 = \varphi(\overline{x}) + \varphi(\overline{y})$  : c'est un morphisme.

Noyau : classes de  $x \in \{0, \dots, 11\}$  divisibles par **4**, soit  $\{0, 4, 8\}$ , de cardinal **3**. Image : toutes les classes de  $\mathbb{Z}/4\mathbb{Z}$  (**0, 1, 2, 3** sont atteintes), de cardinal **4**.

Relation :  $|\text{Ker } \varphi| \times |\text{Im } \varphi| = 3 \times 4 = 12 = |\mathbb{Z}/12\mathbb{Z}|$ . Le noyau n'est pas réduit à  $\{0\}$  :  $\varphi$  n'est pas injectif.

12

## Ordres dans $\mathbb{Z}/12\mathbb{Z}$

★★★

L'ordre de  $k$  est  $\frac{12}{\text{pgcd}(12, k)}$ . Pour **8** :  $\text{pgcd} = 4$ , ordre **3** ( $8 + 8 + 8 = 24 = 0$ ). Pour **5** :

$\text{pgcd} = 1$ , ordre **12**. Pour **9** :  $\text{pgcd} = 3$ , ordre **4**. Pour **6** :  $\text{pgcd} = 6$ , ordre **2**.

Les éléments d'ordre **12** sont ceux premiers avec **12** : **1, 5, 7, 11**, soit **4** éléments.

### 13 Inversibles de $\mathbb{Z}/10\mathbb{Z}$

★★★

Les inversibles sont les classes premières avec  $10$  :  $1, 3, 7, 9$ . Inverses :  $1^{-1} = 1, 3^{-1} = 7$  (car  $21 = 1$ ),  $7^{-1} = 3, 9^{-1} = 9$  (car  $81 = 1$ ).

L'anneau n'est pas un corps :  $2$  n'est pas inversible, et même  $2 \times 5 = 0$  avec  $2, 5 \neq 0$  : ce sont des diviseurs de zéro.

### 14 Somme et produit télescopiques

★★★

On a  $\frac{1}{k} - \frac{1}{k+1} = \frac{1}{k(k+1)}$ . Donc  $\sum_{k=1}^n \left( \frac{1}{k} - \frac{1}{k+1} \right) = 1 - \frac{1}{n+1} = \frac{n}{n+1}$  (somme télescopique). Pour  $n = 99$  :  $\frac{99}{100}$ .

Pour le produit,  $1 + \frac{1}{k} = \frac{k+1}{k}$ , donc  $\prod_{k=1}^{49} \frac{k+1}{k} = \frac{2}{1} \times \frac{3}{2} \times \cdots \times \frac{50}{49} = 50$ .

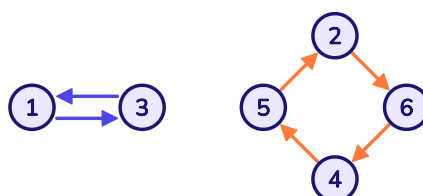
### 15 Décomposer une permutation

★★★

a.  $1 \rightarrow 3 \rightarrow 1 ; 2 \rightarrow 6 \rightarrow 4 \rightarrow 5 \rightarrow 2$ . Donc  $\sigma = (1\ 3)(2\ 6\ 4\ 5)$ .

b. Signature :  $(-1)^1 \times (-1)^3 = +1$ , la permutation est paire. Ordre :  $\text{ppcm}(2, 4) = 4$ .

c.  $\sigma^2$  :  $1, 3$  sont fixes ;  $2 \mapsto \sigma(6) = 4, 4 \mapsto \sigma(5) = 2, 6 \mapsto \sigma(4) = 5, 5 \mapsto \sigma(2) = 6$ , donc  $\sigma^2 = (2\ 4)(5\ 6)$ . Comme  $\sigma^4 = \text{id}$  et  $2026 = 4 \times 506 + 2$ , on a  $\sigma^{2026} = \sigma^2 = (2\ 4)(5\ 6)$ .



## 16 Un groupe dont tous les éléments sont d'ordre 2

★★★

Chaque élément est son propre symétrique :  $x^{-1} = x$ . Soit  $x, y \in G$ . Alors  $x \star y$  est aussi son propre symétrique :  $(x \star y)^{-1} = x \star y$ . Mais on sait que  $(x \star y)^{-1} = y^{-1} \star x^{-1} = y \star x$ . Donc  $x \star y = y \star x$  :  $G$  est abélien.

Exemple :  $(\mathbb{Z}/2\mathbb{Z}, +)$ , où  $1 + 1 = 0$  ; ou encore le produit  $\mathbb{Z}/2\mathbb{Z} \times \mathbb{Z}/2\mathbb{Z}$  muni de l'addition composante par composante.

## 17 L'anneau des $a + b\sqrt{2}$

★★★

- a.  $1 = 1 + 0\sqrt{2}$  appartient à l'ensemble. Si  $x = a + b\sqrt{2}$  et  $y = c + d\sqrt{2}$ , alors  $x - y = (a - c) + (b - d)\sqrt{2}$  et  $xy = (ac + 2bd) + (ad + bc)\sqrt{2}$  sont encore de la forme voulue : c'est un sous-anneau de  $\mathbb{R}$ .
- b.  $(1 + \sqrt{2})(\sqrt{2} - 1) = 2 - 1 = 1$  et  $\sqrt{2} - 1 = -1 + 1 \cdot \sqrt{2} \in \mathbb{Z}[\sqrt{2}]$ , donc  $1 + \sqrt{2}$  est inversible, d'inverse  $-1 + \sqrt{2}$ . De même  $(3 + 2\sqrt{2})(3 - 2\sqrt{2}) = 9 - 8 = 1$ .
- c.  $(1 + \sqrt{2})^3 = 1 + 3\sqrt{2} + 3 \cdot 2 + 2\sqrt{2} = 7 + 5\sqrt{2}$ .
- d. Si  $2(a + b\sqrt{2}) = 1$ , alors  $2a = 1$  et  $2b = 0$  (car  $\sqrt{2}$  est irrationnel), donc  $a = \frac{1}{2} \notin \mathbb{Z}$ . Impossible :  $2$  n'est pas inversible dans  $\mathbb{Z}[\sqrt{2}]$ .

## 18 Sommes de coefficients binomiaux

★★★

Avec  $(1 + 1)^n : \sum \binom{n}{k} = 2^n$ . Avec  $(1 - 1)^n : \sum (-1)^k \binom{n}{k} = 0$ . Avec  $(1 + 3)^n : \sum \binom{n}{k} 3^k = 4^n$  (vérification pour  $n = 5 : 1 + 15 + 90 + 270 + 405 + 243 = 1024 = 4^5$ ).

Pour  $k \geq 1$  :

$$k \binom{n}{k} = k \frac{n!}{k!(n-k)!} = \frac{n!}{(k-1)!(n-k)!} = n \frac{(n-1)!}{(k-1)!(n-k)!} = n \binom{n-1}{k-1}.$$

Donc  $\sum_{k=1}^n k \binom{n}{k} = n \sum_{k=1}^n \binom{n-1}{k-1} = n 2^{n-1}$ . Pour  $n = 10 : 10 \times 512 = 5120$ .

## 19 Résoudre dans le corps $\mathbb{Z}/7\mathbb{Z}$

★★★★

(a) 7 est premier, donc tout  $k \in \{1, \dots, 6\}$  est premier avec 7 :  $\mathbb{Z}/7\mathbb{Z}$  est un corps. Inverses :  $1^{-1} = 1$ ,  $2^{-1} = 4$  ( $8 = 1$ ),  $3^{-1} = 5$  ( $15 = 1$ ),  $4^{-1} = 2$ ,  $5^{-1} = 3$ ,  $6^{-1} = 6$  ( $36 = 1$ ).

(b)  $3x = 2 - 4 = -2 = 5$ , donc  $x = 5 \times 3^{-1} = 5 \times 5 = 25 = 4$ . Vérification :  $3 \times 4 + 4 = 16 = 2$ . Pour  $x^2 = 2$ , on teste :  $3^2 = 9 = 2$  et  $4^2 = 16 = 2$  ; les carrés de 0, 1, 2, 5, 6 valent 0, 1, 4, 4, 1. Solutions :  $x = 3$  et  $x = 4$ .

(c)  $3x = 3$  a pour solutions 1, 3, 5 : trois solutions, car 3 est un diviseur de zéro ( $3 \times 2 = 0$ ) et on ne peut pas simplifier par 3. Dans un corps, l'équation  $ax = b$  avec  $a \neq 0$  a une unique solution.

## 20 Une identité de Vandermonde

★★★★

Le coefficient de  $x^n$  dans  $(1+x)^{2n}$  est  $\binom{2n}{n}$ . Dans le produit  $\left(\sum_i \binom{n}{i} x^i\right) \left(\sum_j \binom{n}{j} x^j\right)$ , on obtient  $x^n$  pour  $i+j=n$ , d'où le coefficient  $\sum_{k=0}^n \binom{n}{k} \binom{n}{n-k}$ . Par symétrie  $\binom{n}{n-k} = \binom{n}{k}$ , donc ce coefficient vaut  $\sum_k \binom{n}{k}^2$  : l'identité est démontrée.

Pour  $n=4$  :  $1 + 16 + 36 + 16 + 1 = 70 = \binom{8}{4}$ .

## 21 Dénumérer dans $S_4$

★★★★

Types possibles : identité (1) ; transpositions ( $\binom{4}{2} = 6$ ) ; 3-cycles ( $\binom{4}{3} \times 2 = 8$ ) ; 4-cycles ( $3! = 6$ ) ; produits de deux transpositions disjointes (3). Total :  $1 + 6 + 8 + 6 + 3 = 24 = 4!$ .

Signatures : identité +1, transposition -1, 3-cycle +1, 4-cycle -1, double transposition +1.  
Paires :  $1 + 8 + 3 = 12 = \frac{4!}{2}$ , ce qui est bien le cardinal de  $A_4$ .

Ordre 2 : les 6 transpositions et les 3 doubles transpositions, soit 9 éléments.

On remplace  $\min(i, j)$  par la somme de l'indication (on compte les entiers  $k$  inférieurs à la fois à  $i$  et à  $j$ ) et on intervertit les sommes :

$$\sum_{i,j} \min(i, j) = \sum_{k=1}^n \left( \sum_{i \geq k} 1 \right) \left( \sum_{j \geq k} 1 \right) = \sum_{k=1}^n (n - k + 1)^2.$$

Avec le changement d'indice  $m = n - k + 1$ , on obtient  $\sum_{m=1}^n m^2$ . Pour  $n = 4$  :

$$1 + 4 + 9 + 16 = 30, \text{ et } \frac{4 \cdot 5 \cdot 9}{6} = 30.$$

### Le livre d'exercices corrigés de maths Maths Sup

Tout le programme en un seul PDF de 134 pages, à imprimer ou à garder sur ta tablette.

Voir le livre



Zyro te conseille la suite



Exercices de maths

Groupes, anneaux et corps : exercices de maths Maths Sup



QCM de maths

Groupes, anneaux et corps : QCM de maths Maths Sup



### Contrôles de maths

Groupes, anneaux et corps : contrôle de maths Maths Sup



### Exercices de maths

Espaces vectoriels et applications linéaires : exercices de maths Maths Sup



### Exercices de maths

Matrices et déterminants : exercices de maths Maths Sup



### QCM de maths

Espaces vectoriels et applications linéaires : QCM de maths Maths Sup

**Zyro vous emmène sur nos sites partenaires**

Embarquez pour d'autres planètes du savoir et leurs applis.

Décollage