

Groupes, anneaux et corps : corrigé du contrôle de maths Maths Sup à télécharger en PDF



Le livre de contrôles corrigés de maths Maths Sup

Tout le programme en un seul PDF de 50 pages, à imprimer ou à garder sur ta tablette.

[Voir le livre](#)

Corrigé du contrôle avec le barème détaillé. Compte tes points et repère ce qu'il faut revoir.

Durée conseillée : 45 minutes. Barème sur 20 points. Calculatrice autorisée seulement quand l'énoncé le précise.

1 Une loi sur un intervalle

/ 3 pts

- a. Pour $x, y \in I$, $1 + xy > 0$, et $(1 + xy) - (x + y) = (1 - x)(1 - y) > 0$,
 $(1 + xy) + (x + y) = (1 + x)(1 + y) > 0$. Donc $|x + y| < 1 + xy$, c'est-à-dire
 $|x \star y| < 1 : I$ est stable. (1 pt)
- b. $x \star 0 = x$: le neutre est 0. (0,5 pt) Le symétrique de x est $-x \in I$, car
$$x \star (-x) = \frac{0}{1 - x^2} = 0. \text{ (1 pt)}$$
- c.
$$\frac{1}{2} \star \frac{1}{3} = \frac{\frac{5}{6}}{1 + \frac{1}{6}} = \frac{5/6}{7/6} = \frac{5}{7}. \text{ (0,5 pt)}$$

2 Un morphisme de $\mathbb{Z}/20\mathbb{Z}$

/ 4 pts

- a. $f(x + y) = 8(x + y) = 8x + 8y = f(x) + f(y)$. (1 pt)
- b. $8x \equiv 0 \pmod{20}$ équivaut à $2x \equiv 0 \pmod{5}$, donc à $x \equiv 0 \pmod{5}$.
 $\text{Ker } f = \{0, 5, 10, 15\}$. (1 pt)
- c. f prend les valeurs 0, 8, 16, 4, 12 pour $x = 0, 1, 2, 3, 4$, puis se répète :
 $\text{Im } f = \{0, 4, 8, 12, 16\}$. (1 pt)
- d. Le noyau n'est pas réduit à $\{0\}$: f n'est pas injectif. (0,5 pt) Relation :
 $4 \times 5 = 20 = |\mathbb{Z}/20\mathbb{Z}|$. (0,5 pt)

3 Calculs dans $\mathbb{Z}/11\mathbb{Z}$

/ 4 pts

- (a) 11 est un nombre premier, donc $\mathbb{Z}/11\mathbb{Z}$ est un corps. (1 pt)
- (b) $7 \times 8 = 56 = 55 + 1 = 1$, donc $7^{-1} = 8$. (1 pt)
- (c) $7x = 2 - 3 = -1 = 10$, donc $x = 10 \times 8 = 80 = 3$ (car $80 = 77 + 3$). Vérification :
 $7 \times 3 + 3 = 24 = 2$. (1 pt)
- (d) $5 = 16$ dans $\mathbb{Z}/11\mathbb{Z}$, donc $x^2 - 5 = x^2 - 16 = (x - 4)(x + 4)$. Dans un corps, un produit nul impose un facteur nul : $x = 4$ ou $x = -4 = 7$. Les solutions sont 4 et 7. (1 pt)

4 Une permutation de S_7

/ 4 pts

- a. $1 \rightarrow 4 \rightarrow 6 \rightarrow 2 \rightarrow 3 \rightarrow 1$ et $5 \rightarrow 7 \rightarrow 5$. Donc $\sigma = (1\ 4\ 6\ 2\ 3)(5\ 7)$. (1 pt)
- b. $\varepsilon(\sigma) = (-1)^4 \times (-1)^1 = -1$. (1 pt)
- c. L'ordre est $\text{ppcm}(5, 2) = 10$. (1 pt)
- d. On inverse chaque cycle : $\sigma^{-1} = (1\ 3\ 2\ 6\ 4)(5\ 7)$, soit en ligne $(3, 6, 2, 1, 7, 4, 5)$. (1 pt)

5 Sommes télescopiques

/ 3 pts

- (a) $\sum_{k=1}^n (2k-1) = 2 \frac{n(n+1)}{2} - n = n^2 + n - n = n^2$. Pour $n = 30 : 900$. (1 pt)
- (b) $(k+1)! - k! = (k+1)k! - k! = k \cdot k!$. (1 pt) La somme télescopique vaut $\sum_{k=1}^5 ((k+1)! - k!) = 6! - 1! = 720 - 1 = 719$. (1 pt)

6 Binôme et dénombrement

/ 2 pts

- (a)
- $$(2x-1)^4 = (2x)^4 - 4(2x)^3 + 6(2x)^2 - 4(2x) + 1 = 16x^4 - 32x^3 + 24x^2 - 8x + 1.$$
- (1 pt)
- (b) $\binom{n}{2} = \frac{n(n-1)}{2} = 36$ donne $n(n-1) = 72 = 9 \times 8$, donc $n = 9$ (l'autre racine -8 est exclue). (1 pt)

Le livre de contrôles corrigés de maths Maths Sup

Tout le programme en un seul PDF de 50 pages, à imprimer ou à garder sur ta tablette.

Voir le livre

 Zyro te conseille la suite

 Contrôles de maths

Groupes, anneaux et corps : contrôle de maths Maths Sup

 Cours de maths

Groupes, anneaux et corps : cours de maths Maths Sup

 QCM de maths

Groupes, anneaux et corps : QCM de maths Maths Sup

 Contrôles de maths

Espaces vectoriels et applications linéaires : contrôle de maths Maths Sup

 Contrôles de maths

 Cours de maths

Matrices et déterminants : contrôle de
maths Maths Sup

Espaces vectoriels et applications
linéaires : cours de maths Maths Sup

Zyro vous emmène sur nos sites partenaires

Embarquez pour d'autres planètes du savoir et leurs applis.

Décollage