

Séries numériques : exercices de maths Maths Spé à télécharger en PDF



Le livre d'exercices corrigés de maths Maths Spé

Tout le programme en un seul PDF de 133 pages, à imprimer ou à garder sur ta tablette.

[Voir le livre](#)

22 exercices classés par difficulté (★ facile, ★★ moyen, ★★★ difficile). Cherche d'abord sans regarder le corrigé !

1 Un télescope simple

★ ★ ★

On considère la série $\sum_{n \geq 1} \frac{1}{n(n+2)}$.

- Vérifier que $\frac{1}{n(n+2)} = \frac{1}{2} \left(\frac{1}{n} - \frac{1}{n+2} \right)$.
- Calculer la somme partielle S_N .
- Conclure sur la nature et la somme de la série.

2 Sommes géométriques



Calculer, lorsque c'est possible : a) $\sum_{n \geq 0} 3 \left(\frac{2}{5} \right)^n$; b) $\sum_{n \geq 2} \left(-\frac{1}{3} \right)^n$; c) $\sum_{n \geq 0} \left(\frac{7}{6} \right)^n$.

3 Divergence grossière ou non ?



Pour chaque série, peut-on conclure avec le seul terme général ? a) $\sum \frac{n}{2n+1}$; b) $\sum \left(1 + \frac{1}{n} \right)^n$; c) $\sum \frac{1}{n^2}$.

4 Séries de Riemann



Donner la nature de : a) $\sum \frac{1}{n\sqrt{n}}$; b) $\sum \frac{1}{\sqrt[3]{n}}$; c) $\sum \frac{1}{n^{1,01}}$; d) $\sum \frac{1}{n^{0,99}}$.

5 Sommes exponentielles



Exprimer à l'aide de e : a) $\sum_{n \geq 0} \frac{2^n}{n!}$; b) $\sum_{n \geq 1} \frac{3^n}{n!}$; c) $\sum_{n \geq 0} \frac{(-1)^n}{n!}$; d) $\sum_{n \geq 2} \frac{1}{n!}$.

6 Vrai ou faux ?



Dire si chaque affirmation est vraie ou fausse, avec une justification.

- Si $u_n \rightarrow 0$, alors $\sum u_n$ converge.
- Si $\sum |u_n|$ converge, alors $\sum u_n$ converge.
- Si $u_n \geq 0$ et $\sum u_n$ converge, alors (u_n) est bornée.
- Si $\sum u_n$ et $\sum v_n$ divergent, alors $\sum (u_n + v_n)$ diverge.

7 Utiliser un équivalent



Nature de : a) $\sum \frac{n+1}{n^3+2}$; b) $\sum \frac{3n+1}{n^2+n}$; c) $\sum \sin \frac{1}{n^2}$; d) $\sum \left(1 - \cos \frac{1}{n}\right)$.

8 Télescopage avec des logarithmes



a) Montrer que $\sum_{n \geq 1} \ln \left(1 + \frac{1}{n}\right)$ diverge. b) Pour $n \geq 2$, calculer

$S_N = \sum_{n=2}^N \ln \left(1 - \frac{1}{n^2}\right)$ et en déduire la somme de la série.

9 Absolue ou semi-convergence



 tudier la convergence et la convergence absolue de : a) $\sum_{n \geq 1} \frac{(-1)^n}{n^2}$; b) $\sum_{n \geq 1} \frac{(-1)^n n}{n^2 + 1}$.

10 Précision d'une somme alternée



On admet que $\sum_{n \geq 0} \frac{(-1)^n}{2n+1}$ converge. Quel est le plus petit entier N pour lequel le critère des séries alternées garantit que S_N approche la somme à moins de **0,005** près ?

11 Comparaisons



 tudier la nature de : a) $\sum \frac{2 + \sin n}{n^2}$; b) $\sum \frac{\ln n}{n^2}$; c) $\sum_{n \geq 3} \frac{\ln n}{n}$.

12 Encadrer un reste



On pose $S_n = \sum_{k=1}^n \frac{1}{k^2}$ et $R_n = \sum_{k>n} \frac{1}{k^2}$.

a. Montrer que $\frac{1}{n+1} \leq R_n \leq \frac{1}{n}$.

b. Sachant que $S_{10} \approx 1,54977$, encadrer la somme de la série.

Voir la figure du cours : les rectangles se placent de la même façon sous la courbe.

13 Produit de Cauchy et exponentielles



a) Montrer que le produit de Cauchy de $\sum \frac{1}{n!}$ et $\sum \frac{3^n}{n!}$ a pour terme général $w_n = \frac{4^n}{n!}$. b)

En déduire $\sum_{n \geq 0} \frac{4^n}{n!}$.

14 Une somme avec un coefficient



Calculer $\sum_{n \geq 0} \frac{n+1}{3^n}$ en utilisant un produit de Cauchy.

15 Temps d'attente à un jeu



À une fête foraine, on gagne un lot avec une probabilité $p = \frac{1}{5}$ à chaque tirage, indépendamment. Soit N le rang du premier succès. On a $P(N = n) = p q^{n-1}$, avec $q = \frac{4}{5}$. Calculer l'espérance $E(N) = \sum_{n \geq 1} n p q^{n-1}$.

16 Une série alternée piège

★★★★

Soit $u_n = \frac{(-1)^n}{\sqrt{n} + (-1)^n}$ pour $n \geq 2$. Posons $\varepsilon_n = \frac{(-1)^n}{\sqrt{n}}$.

- Montrer que $u_n = \varepsilon_n - \frac{1}{n} + \frac{\varepsilon_n^3}{1 + \varepsilon_n}$.
- Montrer que $\sum \frac{\varepsilon_n^3}{1 + \varepsilon_n}$ converge absolument.
- Conclure sur $\sum u_n$. Pourquoi ne peut-on pas utiliser $u_n \sim \varepsilon_n$?

17 Séries de Bertrand

★★★★

- a) Montrer que $\sum_{n \geq 2} \frac{1}{n \ln n}$ diverge en comparant avec $\int_2^{N+1} \frac{dt}{t \ln t}$. b) Montrer que $\sum_{n \geq 2} \frac{1}{n \ln^2 n}$ converge.

18 Sommer des équivalents

★★★★

- a) Montrer que $\sum_{k=1}^N \frac{1}{k + \sqrt{k}} \sim \ln N$. b) Calculer exactement $\sum_{k > N} \frac{1}{k(k+1)}$ et en déduire un équivalent de $\sum_{k > N} \frac{1}{k^2}$.

19 Un produit de Cauchy divergent

★★★★

Soit $u_n = \frac{(-1)^n}{\sqrt{n+1}}$. La série $\sum u_n$ converge (critère des séries alternées). On forme son produit de Cauchy avec elle-même.

- Montrer que $|w_n| = \sum_{k=0}^n \frac{1}{\sqrt{(k+1)(n-k+1)}}$.
- Montrer que $|w_n| \geq \frac{2(n+1)}{n+2}$.
- Conclure. Quelle hypothèse du théorème est en défaut ?

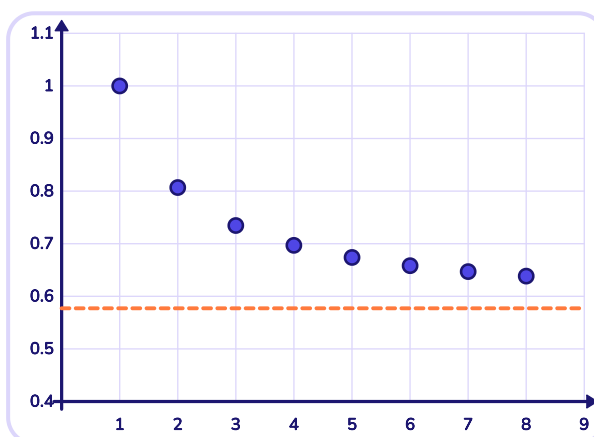
20 La constante d'Euler



On pose $u_n = \frac{1}{n} - \ln\left(1 + \frac{1}{n}\right)$ pour $n \geq 1$.

- Montrer que $0 \leq u_n \leq \frac{1}{2n^2}$ en utilisant $x - \frac{x^2}{2} \leq \ln(1+x) \leq x$ sur $[0, 1]$.
- Calculer $\sum_{n=1}^N u_n$ en fonction de H_N et conclure que $H_N - \ln N$ converge vers une constante γ .
- Encadrer γ grossièrement avec $u_1 = 1 - \ln 2 \approx 0,3069$.

La figure ci-dessous montre les premières valeurs de $H_n - \ln n$.



21 Une série avec paramètre



Pour α réel, étudier la nature de $\sum_{n \geq 1} \left(\sqrt{n+1} - \sqrt{n}\right)^\alpha$.

22 Séries de Riemann alternées



Pour $\alpha \in \mathbb{R}$, étudier la convergence et la convergence absolue de $\sum_{n \geq 1} \frac{(-1)^n}{n^\alpha}$.

Le livre d'exercices corrigés de maths Maths Spé

Tout le programme en un seul PDF de 133 pages, à imprimer ou à garder sur ta tablette.

[Voir le livre](#)

Zyro te conseille la suite

Exercices corrigés de maths

Séries numériques : exercices corrigés de maths Maths Spé

Cours de maths

Séries numériques : cours de maths Maths Spé

QCM de maths

Séries numériques : QCM de maths Maths Spé

Exercices corrigés de maths

Suites et séries de fonctions : exercices corrigés de maths Maths Spé

✓ **Exercices corrigés de maths**

Séries entières : exercices corrigés de maths Maths Spé

■ **Cours de maths**

Suites et séries de fonctions : cours de maths Maths Spé

Zyro vous emmène sur nos sites partenaires

Embarquez pour d'autres planètes du savoir et leurs applis.

Décollage