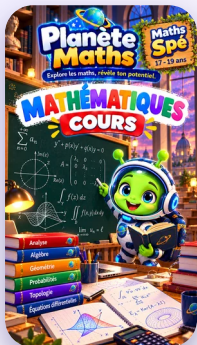


Séries numériques : cours de maths Maths Spé à télécharger en PDF



Le livre de cours de maths Maths Spé

Tout le programme en un seul PDF de 103 pages, à imprimer ou à garder sur ta tablette.

[Voir le livre](#)

Additionner une infinité de nombres : l'idée semble absurde, et pourtant $1 + \frac{1}{2} + \frac{1}{4} + \frac{1}{8} + \dots = 2$. Dans ce chapitre, on donne un sens précis à ces sommes infinies, on apprend à décider si elles « existent » et à les estimer quand on ne sait pas les calculer exactement.

1. Série et sommes partielles

D

Série, somme partielle, reste

Soit $(u_n)_{n \geq 0}$ une suite réelle ou complexe. Sa **somme partielle** d'ordre N est $S_N = \sum_{n=0}^N u_n$. La **série** $\sum u_n$ **converge** si la suite (S_N) converge ; sa limite est la **somme** $S = \sum_{n=0}^{+\infty} u_n$. Sinon elle **diverge**. Quand elle converge, le **reste** $R_N = S - S_N = \sum_{n > N} u_n$ tend vers 0.

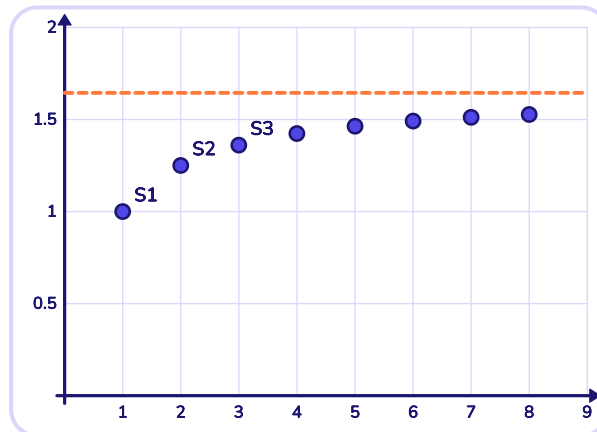
P**Condition nécessaire de convergence**

Si $\sum u_n$ converge, alors $u_n \rightarrow 0$. En effet $u_N = S_N - S_{N-1}$ tend vers $S - S = 0$.
La réciproque est fautive. Si u_n ne tend pas vers 0, la série **diverge grossièrement**.

E**Exemple 1 : télescopage**

Pour $n \geq 1$, $\frac{1}{n(n+1)} = \frac{1}{n} - \frac{1}{n+1}$. Donc $S_N = 1 - \frac{1}{N+1} \rightarrow 1$: la série converge et $\sum_{n \geq 1} \frac{1}{n(n+1)} = 1$.

Voici les premières sommes partielles de $\sum 1/n^2$: elles croissent et semblent s'arrêter sous la barre pointillée.



2. Séries de référence

P

Trois séries à connaître par cœur

- **Géométrique** : $\sum q^n$ converge si et seulement si $|q| < 1$, et alors
$$\sum_{n=0}^{+\infty} q^n = \frac{1}{1-q}.$$
- **Riemann** : $\sum_{n \geq 1} \frac{1}{n^\alpha}$ converge si et seulement si $\alpha > 1$.
- **Exponentielle** : pour tout x réel (ou complexe), $\sum_{n=0}^{+\infty} \frac{x^n}{n!} = e^x$, avec convergence absolue.



Série harmonique

La série $\sum 1/n$ a un terme général qui tend vers 0, mais elle diverge :

$S_{2N} - S_N \geq N \cdot \frac{1}{2N} = \frac{1}{2}$, donc (S_N) n'est pas de Cauchy.

E

Exemple 2 : somme géométrique décalée

$$\sum_{n \geq 1} \frac{2^{n+1}}{5^n} = 2 \sum_{n \geq 1} \left(\frac{2}{5}\right)^n = 2 \cdot \frac{2/5}{1 - 2/5} = \frac{4}{3}.$$

3. Séries à termes positifs et comparaison

P

Séries à termes positifs

Si $u_n \geq 0$, la suite (S_N) est croissante : la série converge si et seulement si (S_N) est **majorée**. De plus, si $0 \leq u_n \leq v_n$ à partir d'un certain rang, alors $\sum v_n$ convergente entraîne $\sum u_n$ convergente, et $\sum u_n$ divergente entraîne $\sum v_n$ divergente. Le même résultat vaut si $u_n = O(v_n)$, $u_n = o(v_n)$ ou $u_n \sim v_n$ avec $v_n \geq 0$; pour $u_n \sim v_n$ les deux séries ont même nature.

M

Méthode : étudier la nature d'une série positive

1. Vérifier que $u_n \rightarrow 0$ (sinon la série diverge grossièrement).
2. Chercher un équivalent simple $u_n \sim \frac{c}{n^\alpha}$ ou une majoration par un terme de référence.
3. Conclure avec Riemann ($\alpha > 1$ ou non) ou avec une série géométrique.

E

Exemple 3 : équivalent

$\frac{2n+1}{n^3+5} \sim \frac{2}{n^2}$, terme positif d'une série de Riemann convergente ($\alpha = 2$) : la série converge. En revanche $\frac{1}{n+\sqrt{n}} \sim \frac{1}{n}$: la série diverge.

4. Convergence absolue

D Convergence absolue

La série $\sum u_n$ est **absolument convergente** si $\sum |u_n|$ converge. Une série convergente mais non absolument convergente est dite **semi-convergente**.

P Absolue implique simple

Toute série absolument convergente converge, et $|\sum u_n| \leq \sum |u_n|$. Pour des réels, on écrit $u_n = u_n^+ - u_n^-$ avec $0 \leq u_n^\pm \leq |u_n|$; chaque partie est une série positive majorée.

E Exemple 4 : sinus et domination

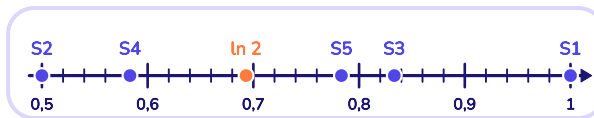
$\left| \frac{\sin n}{n^2} \right| \leq \frac{1}{n^2}$, donc $\sum \frac{\sin n}{n^2}$ converge absolument, donc converge.

5. Séries alternées

P Critère spécial des séries alternées

Si (a_n) est positive, décroissante et de limite 0, alors $\sum (-1)^n a_n$ converge. De plus le reste R_N est du signe de $(-1)^{N+1}$ et $|R_N| \leq a_{N+1}$: la somme est comprise entre deux sommes partielles consécutives.

Pour $\sum_{n \geq 1} \frac{(-1)^{n+1}}{n}$, les sommes partielles encadrent la somme **ln 2** en oscillant :



E Exemple 5 : majoration du reste

Avec $a_n = 1/n$: $S_5 = \frac{47}{60} \approx 0,783$ et $|R_5| \leq \frac{1}{6}$. On a donc $\ln 2 \in [S_5 - \frac{1}{6}, S_5] \approx [0,617; 0,783]$; la figure montre bien **0,693** dans cet intervalle.



Les équivalents ne suffisent pas ici

Les séries $\sum \frac{(-1)^n}{\sqrt{n}}$ et $\sum \left(\frac{(-1)^n}{\sqrt{n}} + \frac{1}{n} \right)$ ont des termes équivalents, mais la première converge et la seconde diverge. L'équivalence ne conserve la nature qu'à signe constant ; sinon on fait un développement asymptotique.

6. Comparaison série-intégrale

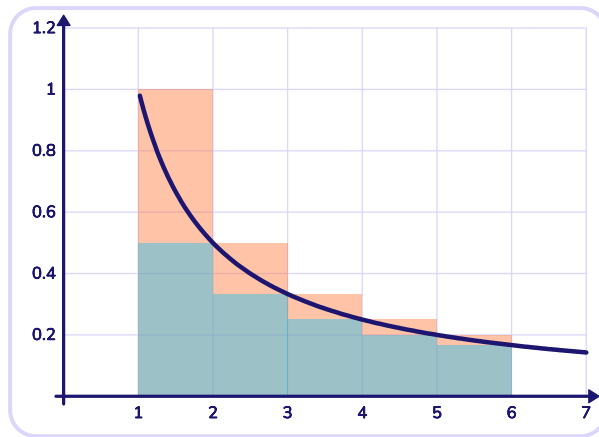


Encadrement par une intégrale

Soit f continue, positive et **décroissante** sur $[1, +\infty[$. Pour $k \geq 1$,

$\int_k^{k+1} f(t) dt \leq f(k) \leq \int_{k-1}^k f(t) dt$ (la seconde inégalité pour $k \geq 2$). Ainsi $\sum f(n)$ converge si et seulement si $\int_1^{+\infty} f$ converge, et en cas de convergence

$$\int_{N+1}^{+\infty} f \leq R_N \leq \int_N^{+\infty} f.$$



E Exemple 6 : somme harmonique

Avec $f(t) = 1/t$: $\ln(N+1) \leq H_N = \sum_{k=1}^N \frac{1}{k} \leq 1 + \ln N$. On en déduit $H_N \sim \ln N$. Avec $f(t) = 1/t^2$ on retrouve $\frac{1}{N+1} \leq R_N \leq \frac{1}{N}$ pour $\sum 1/n^2$.

! Zyro conseille

Sur ta feuille, dessine toujours les rectangles : on voit tout de suite quel sens de l'inégalité est le bon, selon que f est croissante ou décroissante.

7. Sommation des relations de comparaison

P Sommation des équivalents

Soit $u_n \sim v_n$ avec $v_n > 0$ à partir d'un rang.

- Si $\sum v_n$ converge, alors $\sum u_n$ converge et les **restes** sont équivalents :
$$\sum_{k>N} u_k \sim \sum_{k>N} v_k.$$
- Si $\sum v_n$ diverge, alors les **sommes partielles** sont équivalentes :
$$\sum_{k \leq N} u_k \sim \sum_{k \leq N} v_k.$$

Les relations $u_n = o(v_n)$ et $u_n = O(v_n)$ se somment de la même manière.

E Exemple 7 : deux équivalents sommés

$$\frac{1}{k + \sqrt{k}} \sim \frac{1}{k} \text{ et } \sum 1/k \text{ diverge, donc } \sum_{k \leq N} \frac{1}{k + \sqrt{k}} \sim H_N \sim \ln N. \text{ De même}$$
$$\frac{1}{k^2 + 3} \sim \frac{1}{k^2} \text{ et } \sum_{k>N} \frac{1}{k^2} \sim \frac{1}{N}, \text{ donc } \sum_{k>N} \frac{1}{k^2 + 3} \sim \frac{1}{N}.$$

8. Produit de Cauchy

D Produit de Cauchy

Le produit de Cauchy de $\sum u_n$ et $\sum v_n$ est la série de terme général

$$w_n = \sum_{k=0}^n u_k v_{n-k}.$$

P Théorème

Si $\sum u_n$ et $\sum v_n$ sont **absolument convergentes**, leur produit de Cauchy converge absolument et $\sum_{n=0}^{+\infty} w_n = \left(\sum_{n=0}^{+\infty} u_n\right) \left(\sum_{n=0}^{+\infty} v_n\right)$.

E Exemple 8 : deux produits classiques

Avec $u_n = x^n/n!$ et $v_n = y^n/n!$, $w_n = \frac{(x+y)^n}{n!}$ par la formule du binôme, d'où $e^x e^y = e^{x+y}$. Avec $u_n = v_n = x^n$ et $|x| < 1$, $w_n = (n+1)x^n$ donc $\sum_{n \geq 0} (n+1)x^n = \frac{1}{(1-x)^2}$.

À retenir

- Une série converge si ses sommes partielles convergent ; il faut déjà $u_n \rightarrow 0$, mais cela ne suffit pas.
- Références : géométrique ($|q| < 1$), Riemann ($\alpha > 1$), exponentielle (toujours convergente).
- Termes positifs : sommes partielles majorées, comparaison, domination, équivalents.
- Convergence absolue implique convergence ; le critère des séries alternées donne $|R_N| \leq a_{N+1}$.
- Série-intégrale pour f décroissante ; sommation des équivalents (restes si convergence, sommes partielles si divergence) ; produit de Cauchy exigeant la convergence absolue.

Le livre de cours de maths Maths Spé

Tout le programme en un seul PDF de 103 pages, à imprimer ou à garder sur ta tablette.

Voir le livre

Zyro te conseille la suite

Exercices de maths

Séries numériques : exercices de maths
Maths Spé

Contrôles de maths

Séries numériques : contrôle de maths
Maths Spé

QCM de maths

Séries numériques : QCM de maths
Maths Spé

Exercices de maths

Suites et séries de fonctions : exercices
de maths Maths Spé

 Exercices de maths

Séries entières : exercices de maths
Maths Spé

 Contrôles de maths

Suites et séries de fonctions : contrôle de
maths Maths Spé

Zyro vous emmène sur nos sites partenaires

Embarquez pour d'autres planètes du savoir et leurs applis.

Décollage