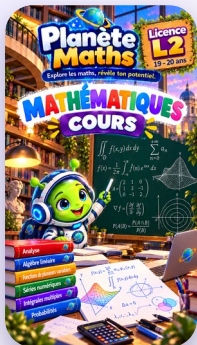


Séries numériques : cours de maths Licence L2 à télécharger en PDF



Le livre de cours de maths Licence L2

Tout le programme en un seul PDF de 100 pages, à imprimer ou à garder sur ta tablette.

[Voir le livre](#)

Additionner une infinité de nombres n'a a priori aucun sens : c'est la notion de limite qui lui en donne un. Ce chapitre construit la théorie des séries numériques réelles : définition par les sommes partielles, critères pour les séries à termes positifs, comparaisons, règles de d'Alembert et de Cauchy, convergence absolue, séries alternées et produit de Cauchy.

1. Sommes partielles et convergence

D

Série convergente

Soit $(u_n)_{n \geq n_0}$ une suite réelle. La **somme partielle** d'ordre N est $S_N = \sum_{n=n_0}^N u_n$. La série $\sum u_n$ **converge** si la suite (S_N) admet une limite finie S , appelée **somme** et notée $S = \sum_{n=n_0}^{+\infty} u_n$. Sinon elle **diverge**. Le **reste** d'ordre N est $R_N = S - S_N = \sum_{n > N} u_n$.

La nature d'une série ne dépend pas de ses premiers termes, et les séries convergentes forment un espace vectoriel : si $\sum u_n$ et $\sum v_n$ convergent, alors $\sum(\lambda u_n + \mu v_n)$ converge et sa somme est $\lambda \sum u_n + \mu \sum v_n$.

P

Condition nécessaire

Si $\sum u_n$ converge, alors $u_n \rightarrow 0$. Preuve : $u_n = S_n - S_{n-1} \rightarrow S - S = 0$. Par contraposée, si (u_n) ne tend pas vers 0, la série **diverge grossièrement**.



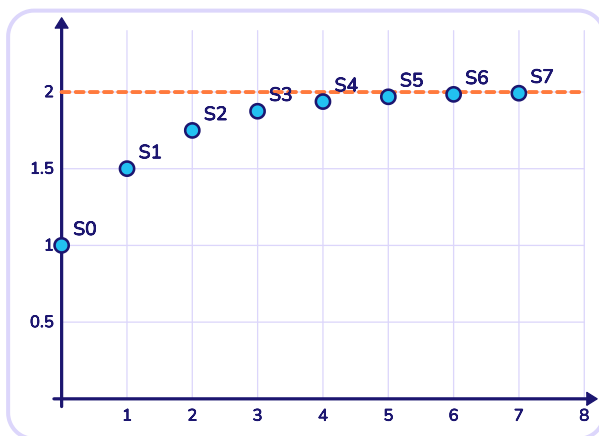
La réciproque est fausse

La série harmonique $\sum \frac{1}{n}$ diverge bien que $\frac{1}{n} \rightarrow 0$: en effet $S_{2N} - S_N = \sum_{n=N+1}^{2N} \frac{1}{n} \geq N \cdot \frac{1}{2N} = \frac{1}{2}$, donc (S_N) n'est pas de Cauchy.

P

Série géométrique

Pour $q \in \mathbb{R}$, la série $\sum_{n \geq 0} q^n$ converge si et seulement si $|q| < 1$, et alors $\sum_{n=0}^{+\infty} q^n = \frac{1}{1-q}$. Preuve : pour $q \neq 1$, $S_N = \frac{1 - q^{N+1}}{1 - q}$.



E**Exemple 1 : télescopage**

Pour $n \geq 1$, $\frac{1}{(2n-1)(2n+1)} = \frac{1}{2} \left(\frac{1}{2n-1} - \frac{1}{2n+1} \right)$. Donc

$$S_N = \frac{1}{2} \left(1 - \frac{1}{2N+1} \right) = \frac{N}{2N+1} \rightarrow \frac{1}{2}. \text{ La série converge et sa somme vaut } \frac{1}{2}.$$
2. Séries à termes positifs**P****Critère de la somme bornée**

Si $u_n \geq 0$ pour tout n , la suite (S_N) est croissante. La série converge donc si et seulement si (S_N) est majorée ; sinon $S_N \rightarrow +\infty$.

P**Théorème de comparaison**

Si $0 \leq u_n \leq v_n$ à partir d'un certain rang, alors : $\sum v_n$ converge $\Rightarrow \sum u_n$ converge ;
 $\sum u_n$ diverge $\Rightarrow \sum v_n$ diverge.

E**Exemple 2 : la série des $\frac{1}{n!}$**

Pour $n \geq 1$, $n! \geq 2^{n-1}$, donc $0 < \frac{1}{n!} \leq \frac{1}{2^{n-1}}$. Or $\sum_{n \geq 1} \frac{1}{2^{n-1}}$ est géométrique de raison $\frac{1}{2}$ et converge (somme 2). Par comparaison, $\sum \frac{1}{n!}$ converge, et $S_N \leq 2$.

3. Comparaison et équivalents

P Comparaison asymptotique

Soient $u_n \geq 0$ et $v_n > 0$. Si $u_n = O(v_n)$, la convergence de $\sum v_n$ entraîne celle de $\sum u_n$. Si $u_n \sim v_n$, les séries $\sum u_n$ et $\sum v_n$ ont **même nature**. Preuve : $\frac{u_n}{v_n} \rightarrow 1$ donne $\frac{1}{2}v_n \leq u_n \leq 2v_n$ à partir d'un rang, puis on applique la comparaison.

⚠ Signe constant exigé

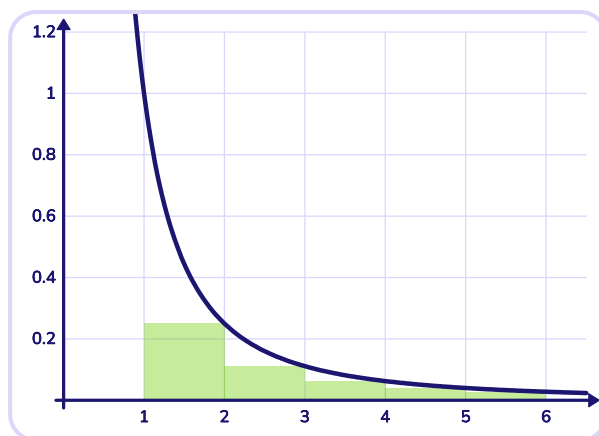
L'équivalence ne dit rien si le signe n'est pas constant. Avec $u_n = \frac{(-1)^n}{\sqrt{n}}$ et $v_n = u_n + \frac{1}{n}$, on a $u_n \sim v_n$ (car $\frac{1}{n} = o(\frac{1}{\sqrt{n}})$), pourtant $\sum u_n$ converge et $\sum v_n$ diverge.

4. Séries de Riemann

P Séries de Riemann

La série $\sum_{n \geq 1} \frac{1}{n^\alpha}$ converge si et seulement si $\alpha > 1$.

Pour $\alpha \leq 0$, le terme ne tend pas vers 0. Pour $\alpha > 0$, la fonction $f(x) = x^{-\alpha}$ est décroissante, donc $\int_n^{n+1} f \leq f(n) \leq \int_{n-1}^n f$. En sommant, $\int_1^{N+1} f \leq \sum_{n=1}^N f(n) \leq f(1) + \int_1^N f$: la série et l'intégrale généralisée $\int_1^{+\infty} x^{-\alpha} dx$ ont même nature, et cette dernière converge si et seulement si $\alpha > 1$.



Série	Exposant	Nature
$\sum \frac{1}{n}$	$\alpha = 1$	diverge
$\sum \frac{1}{\sqrt{n}}$	$\alpha = \frac{1}{2}$	diverge
$\sum \frac{1}{n^2}$	$\alpha = 2$	converge
$\sum \frac{1}{n\sqrt{n}}$	$\alpha = \frac{3}{2}$	converge

E Exemple 3 : équivalents

Soit $u_n = \frac{n+3}{n^3+2n+1}$. Alors $u_n \sim \frac{n}{n^3} = \frac{1}{n^2}$, série de Riemann convergente : $\sum u_n$ converge. En revanche $v_n = \frac{2n+1}{n^2-4}$ (pour $n \geq 3$) vérifie $v_n \sim \frac{2}{n}$: $\sum v_n$ diverge.

5. Règles de d'Alembert et de Cauchy

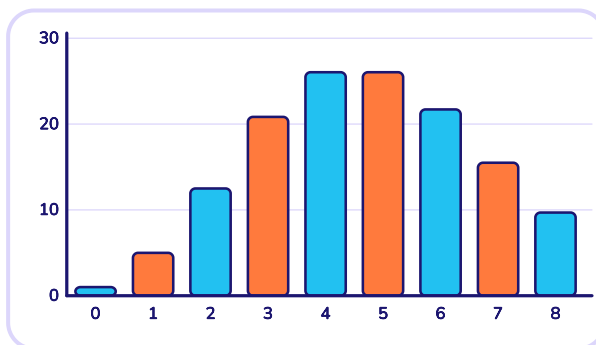
P Règle de d'Alembert

Soit $u_n > 0$ tel que $\frac{u_{n+1}}{u_n} \rightarrow \ell \in [0, +\infty]$. Si $\ell < 1$, la série converge ; si $\ell > 1$, elle diverge (grossièrement) ; si $\ell = 1$, on ne peut rien conclure.

P Règle de Cauchy

Soit $u_n \geq 0$ tel que $\sqrt[n]{u_n} \rightarrow \ell$. Mêmes conclusions : convergence si $\ell < 1$, divergence si $\ell > 1$, aucune conclusion si $\ell = 1$.

Idée de la preuve pour $\ell < 1$: on choisit $r \in]\ell, 1[$; à partir d'un rang n_1 , $u_{n+1} \leq ru_n$, d'où $u_n \leq u_{n_1} r^{n-n_1}$, terme général d'une série géométrique convergente. Les termes de $\sum \frac{5^n}{n!}$ illustrent le mécanisme : ils croissent tant que $\frac{5}{n+1} > 1$, puis s'effondrent.



E Exemple 4

Pour $u_n = \frac{n!}{n^n}$, $\frac{u_{n+1}}{u_n} = \frac{(n+1)n^n}{(n+1)^{n+1}} = \left(\frac{n}{n+1}\right)^n = \frac{1}{(1+1/n)^n} \rightarrow \frac{1}{e} < 1$. La série converge. Pour $v_n = \left(\frac{n}{3n+2}\right)^n$, $\sqrt[n]{v_n} \rightarrow \frac{1}{3} < 1$: elle converge aussi.



Cas $\ell = 1$

Pour $\frac{1}{n}$ et $\frac{1}{n^2}$, le rapport tend vers **1** ; pourtant la première série diverge et la seconde converge. Il faut alors un autre outil (équivalent, comparaison à une série de Riemann).

6. Convergence absolue



Convergence absolue

Une série $\sum u_n$ à termes réels est **absolument convergente** si $\sum |u_n|$ converge. Une série convergente mais non absolument convergente est dite **semi-convergente**.



Théorème

Toute série absolument convergente converge, et $|\sum u_n| \leq \sum |u_n|$. Preuve : $0 \leq u_n + |u_n| \leq 2|u_n|$, donc $\sum (u_n + |u_n|)$ converge par comparaison, puis $\sum u_n = \sum (u_n + |u_n|) - \sum |u_n|$.



Exemple 5

Comme $\left| \frac{\sin n}{n^2} \right| \leq \frac{1}{n^2}$, la série $\sum \frac{\sin n}{n^2}$ est absolument convergente, donc convergente.

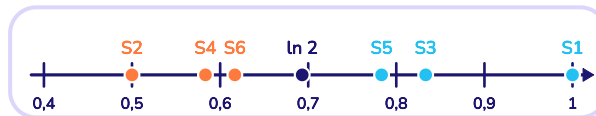
7. Séries alternées

P

Critère spécial des séries alternées

Si (a_n) est une suite **décroissante** de réels positifs de limite **0**, alors $\sum (-1)^n a_n$ converge. De plus, sa somme S est comprise entre deux sommes partielles consécutives, et $|R_N| \leq a_{N+1}$, le reste ayant le signe de son premier terme.

Preuve : les suites (S_{2N}) et (S_{2N+1}) sont respectivement décroissante et croissante, et $S_{2N+1} - S_{2N} = -a_{2N+1} \rightarrow 0$: elles sont adjacentes.



E

Exemple 6

La série $\sum_{n \geq 1} \frac{(-1)^n}{\sqrt{n}}$ converge d'après le critère ($\frac{1}{\sqrt{n}}$ décroît vers **0**), mais pas absolument (Riemann, $\alpha = \frac{1}{2}$) : elle est semi-convergente. Pour la série harmonique alternée $\sum_{n \geq 1} \frac{(-1)^{n+1}}{n}$, la somme vaut **$\ln 2 \approx 0,693$** ; ses sommes partielles l'encadrent comme sur la figure.

⚠

La décroissance est indispensable

Sans elle, le critère tombe en défaut : voir l'exercice sur $\frac{(-1)^n}{\sqrt{n} + (-1)^n}$, série divergente dont le terme général tend pourtant vers **0** en alternant.

M**Méthode : étudier la nature d'une série**

- a. Le terme général tend-il vers **0** ? Sinon, divergence grossière.
- b. Signe constant ? Chercher un équivalent simple (Riemann, géométrique) ou comparer.
- c. Factorielles ou puissances ***n***-ièmes ? Rapport de d'Alembert ou racine de Cauchy.
- d. Signe variable ? Tester la convergence absolue, sinon le critère des séries alternées.

8. Produit de Cauchy**D****Produit de Cauchy**

Le produit de Cauchy de $\sum a_n$ et $\sum b_n$ est la série $\sum c_n$ où $c_n = \sum_{k=0}^n a_k b_{n-k}$.

P**Théorème**

Si $\sum a_n$ et $\sum b_n$ sont absolument convergentes, alors $\sum c_n$ est absolument convergente et $\sum_{n=0}^{+\infty} c_n = \left(\sum_{n=0}^{+\infty} a_n\right) \left(\sum_{n=0}^{+\infty} b_n\right)$.

E**Exemple 7**

Avec $a_n = \left(\frac{1}{2}\right)^n$ et $b_n = \left(\frac{1}{3}\right)^n$, $c_n = \sum_{k=0}^n 2^{-k} 3^{-(n-k)} = 6 \left(2^{-(n+1)} - 3^{-(n+1)}\right)$.

Le théorème donne $\sum c_n = 2 \times \frac{3}{2} = 3$. Avec la formule du binôme, on retrouve aussi $\sum \frac{x^n}{n!} \cdot \sum \frac{y^n}{n!} = \sum \frac{(x+y)^n}{n!}$.



Hypothèse essentielle

La seule convergence ne suffit pas : le produit de Cauchy de $\sum \frac{(-1)^n}{\sqrt{n+1}}$ par elle-même diverge (exercice 19).

À retenir

- $\sum u_n$ converge si (S_N) converge ; alors $u_n \rightarrow 0$ (réciproque fausse).
- Géométrique : $\sum q^n$ converge ssi $|q| < 1$, de somme $\frac{1}{1-q}$. Riemann : $\sum \frac{1}{n^\alpha}$ converge ssi $\alpha > 1$.
- Termes positifs : somme bornée, comparaison, équivalents (même nature).
- d'Alembert et Cauchy : limite < 1 converge, > 1 diverge, $= 1$ ne dit rien.
- Convergence absolue $\Rightarrow$ convergence ; critère des séries alternées avec $|R_N| \leq a_{N+1}$.
- Produit de Cauchy : somme égale au produit des sommes si les deux séries sont absolument convergentes.

Le livre de cours de maths Licence L2

Tout le programme en un seul PDF de 100 pages, à imprimer ou à garder sur ta tablette.

[Voir le livre](#)



Entraîne-toi : défi express de Licence L2

[Changer de niveau](#)

Niveau : Licence L2

6 questions au hasard, correction tout de suite.



Lancer le défi



Zyro te conseille la suite



Exercices de maths

Séries numériques : exercices de maths
Licence L2



Contrôles de maths

Séries numériques : contrôle de maths
Licence L2



QCM de maths

Séries numériques : QCM de maths
Licence L2



Exercices de maths

Séries entières : exercices de maths
Licence L2

 Exercices de maths

Topologie des espaces métriques et normés : exercices de maths Licence L2

 Contrôles de maths

Séries entières : contrôle de maths Licence L2

Zyro vous emmène sur nos sites partenaires

Embarquez pour d'autres planètes du savoir et leurs applis.

Décollage