

Séries numériques : exercices corrigés de maths Maths Spé à télécharger en PDF



Le livre d'exercices corrigés de maths Maths Spé

Tout le programme en un seul PDF de 133 pages, à imprimer ou à garder sur ta tablette.

[Voir le livre](#)

Corrigés rédigés des exercices du chapitre. Vérifie chaque étape, puis corrige-toi.

1 Un télescopage simple



a.
$$\frac{1}{2} \left(\frac{1}{n} - \frac{1}{n+2} \right) = \frac{1}{2} \cdot \frac{(n+2) - n}{n(n+2)} = \frac{1}{n(n+2)}.$$

b. Les termes se compensent de deux en deux :

$$S_N = \frac{1}{2} \left(1 + \frac{1}{2} - \frac{1}{N+1} - \frac{1}{N+2} \right).$$

c. Quand $N \rightarrow +\infty$, $S_N \rightarrow \frac{1}{2} \cdot \frac{3}{2} = \frac{3}{4}$. La série converge et sa somme vaut $\frac{3}{4}$.

2 Sommes géométriques



- a) $|q| = \frac{2}{5} < 1$: somme $= 3 \cdot \frac{1}{1 - 2/5} = 3 \cdot \frac{5}{3} = 5$.
- b) $q = -\frac{1}{3}$, premier terme $q^2 = \frac{1}{9}$: somme $= \frac{1/9}{1 + 1/3} = \frac{1/9}{4/3} = \frac{1}{12}$.
- c) $q = \frac{7}{6} > 1$: la série diverge (grossièrement).

3 Divergence grossière ou non ?



- a) $\frac{n}{2n+1} \rightarrow \frac{1}{2} \neq 0$: divergence grossière.
- b) $(1 + \frac{1}{n})^n \rightarrow e \neq 0$: divergence grossière.
- c) $\frac{1}{n^2} \rightarrow 0$: on ne peut pas conclure ainsi. Par Riemann ($\alpha = 2 > 1$) la série converge.

4 Séries de Riemann



- a) $n\sqrt{n} = n^{3/2}$, $\alpha = \frac{3}{2} > 1$: converge.
- b) $\alpha = \frac{1}{3} \leq 1$: diverge.
- c) $\alpha = 1,01 > 1$: converge.
- d) $\alpha = 0,99 \leq 1$: diverge.

5 Sommes exponentielles



On utilise $\sum_{n \geq 0} x^n / n! = e^x$.

- a) $x = 2$: e^2 .
- b) $x = 3$, sans le terme $n = 0$ qui vaut 1 : $e^3 - 1$.
- c) $x = -1$: $e^{-1} = \frac{1}{e}$.
- d) $x = 1$, on retire les termes 1 et 1 pour $n = 0, 1$: $e - 2$.

6 Vrai ou faux ?



- a. Faux : $u_n = 1/n \rightarrow 0$ mais $\sum 1/n$ diverge.
- b. Vrai : la convergence absolue entraîne la convergence.
- c. Vrai : $u_n \rightarrow 0$, donc (u_n) converge, donc est bornée.
- d. Faux : avec $u_n = 1$ et $v_n = -1$, les deux séries divergent mais $\sum (u_n + v_n) = \sum 0$ converge.

7 Utiliser un équivalent



Ces termes sont positifs, on peut utiliser les équivalents.

- a) $\sim \frac{1}{n^2}$: converge.
- b) $\sim \frac{3}{n}$: diverge.
- c) $\sin u \sim u$ donc $\sim \frac{1}{n^2}$: converge.
- d) $1 - \cos u \sim \frac{u^2}{2}$ donc $\sim \frac{1}{2n^2}$: converge.

8 Télescopage avec des logarithmes



- a) $\ln\left(1 + \frac{1}{n}\right) = \ln(n+1) - \ln n$ donc $S_N = \ln(N+1) \rightarrow +\infty$: la série diverge.
- b) $1 - \frac{1}{n^2} = \frac{(n-1)(n+1)}{n^2}$, donc
$$S_N = \ln \prod_{n=2}^N \frac{n-1}{n} \cdot \frac{n+1}{n} = \ln \left(\frac{1}{N} \cdot \frac{N+1}{2} \right) = \ln \frac{N+1}{2N}.$$
 Quand $N \rightarrow +\infty$,
$$S_N \rightarrow \ln \frac{1}{2} = -\ln 2.$$

9

Absolue ou semi-convergence

★★★

- a) $\left| \frac{(-1)^n}{n^2} \right| = \frac{1}{n^2}$, série de Riemann convergente : convergence absolue, donc convergence.
- b) Posons $a_n = \frac{n}{n^2 + 1} = f(n)$ avec $f(x) = \frac{x}{x^2 + 1}$. Alors $f'(x) = \frac{1 - x^2}{(x^2 + 1)^2} \leq 0$ pour $x \geq 1$: (a_n) décroît, et $a_n \rightarrow 0$. Le critère des séries alternées donne la convergence. Mais $n^2 + 1 \leq 2n^2$ donne $a_n \geq \frac{1}{2n}$, terme d'une série divergente : pas de convergence absolue. La série est semi-convergente.

10

Précision d'une somme alternée

★★★

La suite $a_n = \frac{1}{2n + 1}$ est décroissante, de limite 0 : le critère s'applique et

$$|R_N| \leq a_{N+1} = \frac{1}{2N + 3}.$$

On veut $\frac{1}{2N + 3} < 0,005$, soit $2N + 3 > 200$, soit $N > 98,5$. Le plus petit entier convenable est $N = 99$ (pour $N = 98$, la majoration vaut $\frac{1}{199} > 0,005$).

11

Comparaisons

★★★

- a) $0 \leq \frac{2 + \sin n}{n^2} \leq \frac{3}{n^2}$: converge par comparaison à Riemann.
- b) On a $\ln n \leq \sqrt{n}$ pour tout $n \geq 1$, donc $0 \leq \frac{\ln n}{n^2} \leq \frac{1}{n^{3/2}}$: converge.
- c) Pour $n \geq 3$, $\ln n \geq 1$ donc $\frac{\ln n}{n} \geq \frac{1}{n}$: diverge par comparaison avec la série harmonique.

12 Encadrer un reste



a. La fonction $f(t) = 1/t^2$ est positive, continue, décroissante. Donc

$$\int_{n+1}^{+\infty} \frac{dt}{t^2} \leq R_n \leq \int_n^{+\infty} \frac{dt}{t^2}, \text{ soit } \frac{1}{n+1} \leq R_n \leq \frac{1}{n}.$$

b. Pour $n = 10$: $\frac{1}{11} \leq R_{10} \leq \frac{1}{10}$ et la somme vaut $S_{10} + R_{10}$. Donc

$$1,6406 \leq \sum_{k \geq 1} \frac{1}{k^2} \leq 1,6498.$$

13 Produit de Cauchy et exponentielles



a) $w_n = \sum_{k=0}^n \frac{1}{k!} \cdot \frac{3^{n-k}}{(n-k)!} = \frac{1}{n!} \sum_{k=0}^n \binom{n}{k} 3^{n-k} = \frac{(1+3)^n}{n!} = \frac{4^n}{n!}.$

b) Les deux séries convergent absolument (termes positifs). Le théorème donne

$$\sum_{n \geq 0} \frac{4^n}{n!} = e \cdot e^3 = e^4, \text{ ce qui est cohérent avec } \sum x^n/n! = e^x.$$

14 Une somme avec un coefficient



Posons $u_n = v_n = \left(\frac{1}{3}\right)^n$, absolument convergentes. Alors

$$w_n = \sum_{k=0}^n \left(\frac{1}{3}\right)^k \left(\frac{1}{3}\right)^{n-k} = (n+1) \left(\frac{1}{3}\right)^n. \text{ Ainsi}$$

$$\sum_{n \geq 0} \frac{n+1}{3^n} = \left(\frac{1}{1-1/3}\right)^2 = \left(\frac{3}{2}\right)^2 = \frac{9}{4}.$$

15 Temps d'attente à un jeu



Le produit de Cauchy de $\sum q^n$ par elle-même donne, pour $|q| < 1$,

$$\sum_{n \geq 0} (n+1)q^n = \frac{1}{(1-q)^2}. \text{ En décalant l'indice, } \sum_{n \geq 1} nq^{n-1} = \frac{1}{(1-q)^2}.$$

Donc $E(N) = p \cdot \frac{1}{(1-q)^2} = \frac{1}{5} \cdot \frac{1}{(1/5)^2} = \frac{1}{5} \cdot 25 = 5$. Il faut en moyenne cinq tirages pour gagner.

16 Une série alternée piège

★★★★

a. On a $u_n = \frac{\varepsilon_n}{1 + \varepsilon_n}$. Or $\varepsilon - \varepsilon^2 + \frac{\varepsilon^3}{1 + \varepsilon} = \frac{(\varepsilon - \varepsilon^2)(1 + \varepsilon) + \varepsilon^3}{1 + \varepsilon} = \frac{\varepsilon}{1 + \varepsilon}$, et $\varepsilon_n^2 = \frac{1}{n}$.

b. $|\varepsilon_n|^3 = n^{-3/2}$ et $1 + \varepsilon_n \rightarrow 1$ donc $\left| \frac{\varepsilon_n^3}{1 + \varepsilon_n} \right| \sim n^{-3/2}$: Riemann convergente.

c. $\sum \varepsilon_n$ converge (critère des séries alternées), $\sum \frac{1}{n}$ diverge. Donc $\sum u_n$ est la somme d'une série convergente, d'une série divergente et d'une série convergente : elle **diverge**. L'équivalent $u_n \sim \varepsilon_n$ est vrai mais ne dit rien, car les termes changent de signe.

17 Séries de Bertrand

★★★★

a) $f(t) = \frac{1}{t \ln t}$ est positive et décroissante sur $[2, +\infty[$. Donc

$\sum_{n=2}^N f(n) \geq \int_2^{N+1} f = \ln \ln(N+1) - \ln \ln 2 \rightarrow +\infty$: la série diverge.

b) $g(t) = \frac{1}{t \ln^2 t}$ est positive et décroissante, de primitive $-\frac{1}{\ln t}$. Pour $n \geq 3$,

$g(n) \leq \int_{n-1}^n g$, donc $\sum_{n=3}^N g(n) \leq \int_2^N g = \frac{1}{\ln 2} - \frac{1}{\ln N} \leq \frac{1}{\ln 2}$. Les sommes partielles sont majorées, la série est positive : elle converge.

18 Sommer des équivalents

★★★★

a) $\frac{1}{k + \sqrt{k}} \sim \frac{1}{k}$, termes positifs, $\sum \frac{1}{k}$ diverge : les sommes partielles sont équivalentes,

$\sum_{k \leq N} \frac{1}{k + \sqrt{k}} \sim H_N$. Or $\ln(N+1) \leq H_N \leq 1 + \ln N$ donne $H_N \sim \ln N$.

b) $\frac{1}{k(k+1)} = \frac{1}{k} - \frac{1}{k+1}$, donc $\sum_{k > N} \frac{1}{k(k+1)} = \frac{1}{N+1} \sim \frac{1}{N}$. Comme

$\frac{1}{k(k+1)} \sim \frac{1}{k^2}$ et les séries convergent, les restes sont équivalents : $\sum_{k > N} \frac{1}{k^2} \sim \frac{1}{N}$.

19 Un produit de Cauchy divergent

★★★★

a. $u_k u_{n-k} = \frac{(-1)^k (-1)^{n-k}}{\sqrt{(k+1)(n-k+1)}} = \frac{(-1)^n}{\sqrt{(k+1)(n-k+1)}}$, donc

$$w_n = (-1)^n \sum_k \frac{1}{\sqrt{(k+1)(n-k+1)}}.$$

b. Par l'inégalité arithmético-géométrique,

$$\sqrt{(k+1)(n-k+1)} \leq \frac{(k+1) + (n-k+1)}{2} = \frac{n+2}{2}. \text{ Chacun des } n+1 \text{ termes est donc } \geq \frac{2}{n+2}.$$

c. $|w_n| \geq \frac{2(n+1)}{n+2} \rightarrow 2 : w_n \nrightarrow 0$, le produit de Cauchy diverge grossièrement. La série $\sum u_n$ est semi-convergente, non absolument convergente : l'hypothèse de convergence absolue est en défaut.

20 La constante d'Euler

★★★★

a. Avec $x = \frac{1}{n} : \frac{1}{n} - \frac{1}{2n^2} \leq \ln \left(1 + \frac{1}{n} \right) \leq \frac{1}{n}$, d'où $0 \leq u_n \leq \frac{1}{2n^2}$.

b. $\sum_{n=1}^N \ln \left(1 + \frac{1}{n} \right) = \ln(N+1)$ (télescopage), donc $\sum_{n=1}^N u_n = H_N - \ln(N+1)$.

La série $\sum u_n$ est positive et majorée par $\sum \frac{1}{2n^2}$: elle converge. Comme

$$\ln(N+1) - \ln N = \ln \left(1 + \frac{1}{N} \right) \rightarrow 0, H_N - \ln N \text{ converge vers la même somme}$$

$$\gamma = \sum_{n \geq 1} u_n.$$

c. $\gamma \geq u_1 \approx 0,3069$ et $\gamma \leq u_1 + \frac{1}{2} \sum_{n \geq 2} \frac{1}{n^2} \leq u_1 + \frac{1}{2}$ (car $\sum_{n \geq 2} \frac{1}{n^2} \leq 1$). Donc $0,30 \leq \gamma \leq 0,81$; la figure suggère $\gamma \approx 0,577$.

21 Une série avec paramètre

★★★★

$$\sqrt{n+1} - \sqrt{n} = \frac{1}{\sqrt{n+1} + \sqrt{n}} \sim \frac{1}{2\sqrt{n}}.$$

Pour α fixé, on peut élever l'équivalent à la puissance α : $u_n \sim 2^{-\alpha} n^{-\alpha/2}$, terme positif.

Par comparaison à Riemann, la série converge si et seulement si $\frac{\alpha}{2} > 1$, c'est-à-dire $\alpha > 2$.

22

Séries de Riemann alternées



Cas $\alpha > 1$: $\sum \frac{1}{n^\alpha}$ converge, donc convergence absolue.

Cas $0 < \alpha \leq 1$: $a_n = n^{-\alpha}$ décroît vers 0, donc la série converge (critère des séries alternées) ; mais $\sum n^{-\alpha}$ diverge : semi-convergence.

Cas $\alpha \leq 0$: $|u_n| = n^{-\alpha} \geq 1$, le terme général ne tend pas vers 0 : divergence grossière.

Le livre d'exercices corrigés de maths Maths Spé

Tout le programme en un seul PDF de 133 pages, à imprimer ou à garder sur ta tablette.

[Voir le livre](#)

Zyro te conseille la suite

Exercices de maths

Séries numériques : exercices de maths Maths Spé

QCM de maths

Séries numériques : QCM de maths Maths Spé



Contrôles de maths

Séries numériques : contrôle de maths
Maths Spé



Exercices de maths

Suites et séries de fonctions : exercices
de maths Maths Spé



Exercices de maths

Séries entières : exercices de maths
Maths Spé



QCM de maths

Suites et séries de fonctions : QCM de
maths Maths Spé

Zyro vous emmène sur nos sites partenaires

Embarquez pour d'autres planètes du savoir et leurs applis.

Décollage