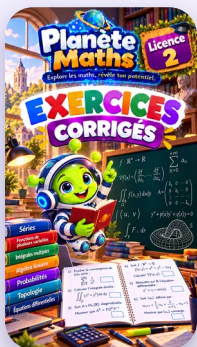


Séries numériques : exercices corrigés de maths Licence L2 à télécharger en PDF



Le livre d'exercices corrigés de maths Licence L2

Tout le programme en un seul PDF de 128 pages, à imprimer ou à garder sur ta tablette.

[Voir le livre](#)

Corrigés rédigés des exercices du chapitre. Vérifie chaque étape, puis corrige-toi.

1 Somme d'une série géométrique



a. $S_3 = 1 + \frac{2}{3} + \frac{4}{9} + \frac{8}{27} = \frac{27+18+12+8}{27} = \frac{65}{27}$.

b. Pour $q = \frac{2}{3} \neq 1$, $S_N = \frac{1 - q^{N+1}}{1 - q} = 3 \left(1 - \left(\frac{2}{3} \right)^{N+1} \right)$. Comme $|q| < 1$, $q^{N+1} \rightarrow 0$
donc $S_N \rightarrow 3$: la série converge et sa somme vaut 3.

2 Divergence grossière ou pas ?



- a. $\frac{2n+1}{3n+5} \rightarrow \frac{2}{3} \neq 0$: la série diverge grossièrement.
- b. $(-1)^n$ n'a pas de limite, donc ne tend pas vers 0 : divergence grossière.
- c. $\frac{1}{n+3} \rightarrow 0$: on ne peut rien conclure par ce critère. Comme $\frac{1}{n+3} \sim \frac{1}{n}$, la série diverge par équivalence avec la série harmonique.

3 Séries de Riemann



On compare l'exposant α à 1. $\alpha = 3 > 1$: converge. $\alpha = \frac{1}{2} \leq 1$: diverge. $\alpha = \frac{5}{4} > 1$: converge. $\alpha = 0,99 \leq 1$: diverge.

4 Vrai ou faux ?



- a. Faux : $u_n = \frac{1}{n} \rightarrow 0$ mais la série harmonique diverge.
- b. Vrai : $u_n = S_n - S_{n-1} \rightarrow 0$.
- c. Vrai : la convergence absolue entraîne la convergence.
- d. Faux : avec $u_n = 1$ et $v_n = -1$, les deux séries divergent mais $\sum(u_n + v_n) = \sum 0$ converge.

5 Un équivalent simple



$\frac{3n^2+1}{n^4+n} \sim \frac{3n^2}{n^4} = \frac{3}{n^2}$, terme positif d'une série de Riemann convergente ($\alpha = 2$) : la première série converge.

$\frac{5n+2}{n^2-3} \sim \frac{5n}{n^2} = \frac{5}{n}$, termes positifs, série harmonique divergente : la seconde série diverge.

6 Rapport de d'Alembert



Pour $u_n = \frac{5^n}{n!} > 0$, $\frac{u_{n+1}}{u_n} = \frac{5}{n+1} \rightarrow 0 < 1$: d'après la règle de d'Alembert, la série converge.

Ce rapport est supérieur à 1 tant que $n+1 < 5$, égal à 1 pour $n = 4$ et inférieur à 1 ensuite : le maximum est atteint pour $n = 4$ et $n = 5$, avec $u_4 = u_5 = \frac{625}{24} \approx 26,04$.

7 La balle qui rebondit



La hauteur après le k -ième rebond est $h_k = 2 \times 0,6^k$. Chaque rebond ajoute une montée et une descente, soit $2h_k$. La distance totale vaut

$$D = 2 + 2 \sum_{k \geq 1} 2 \times 0,6^k = 2 + 4 \times \frac{0,6}{1 - 0,6} = 2 + 4 \times 1,5 = 8.$$

La balle parcourt 8 m au total.

8 Un télescope



On a $\frac{1}{n(n+2)} = \frac{1}{2} \left(\frac{1}{n} - \frac{1}{n+2} \right)$. Donc

$S_N = \frac{1}{2} \sum_{n=1}^N \left(\frac{1}{n} - \frac{1}{n+2} \right) = \frac{1}{2} \left(1 + \frac{1}{2} - \frac{1}{N+1} - \frac{1}{N+2} \right)$ (les autres termes se simplifient). Quand $N \rightarrow \infty$, $S_N \rightarrow \frac{1}{2} \times \frac{3}{2} = \frac{3}{4}$.

La série converge et sa somme vaut $\frac{3}{4}$.

9 Comparaison



a. $0 < \frac{1}{n^2+n+3} \leq \frac{1}{n^2}$, série de Riemann convergente : la série converge.

b. Pour $n \geq 3$, $\ln n \geq 1$, donc $\frac{\ln n}{n} \geq \frac{1}{n}$, terme d'une série divergente : la série diverge.

c. $0 < \frac{1}{2^n+n} \leq \frac{1}{2^n}$, série géométrique convergente : la série converge.

10 Équivalents classiques



Quand $x \rightarrow 0$, $\ln(1+x) \sim x$: $\ln\left(1 + \frac{1}{n^2}\right) \sim \frac{1}{n^2}$. Les termes sont positifs et $\sum \frac{1}{n^2}$ converge : la première série converge.

Quand $x \rightarrow 0$, $\sin x \sim x$: $\sin\left(\frac{1}{\sqrt{n}}\right) \sim \frac{1}{\sqrt{n}}$, positif pour $n \geq 1$ (l'argument est dans $]0, 1]$). Comme $\sum \frac{1}{\sqrt{n}}$ diverge, la seconde série diverge.

11 Règle de Cauchy



Pour la première, $\sqrt[n]{u_n} = \frac{n}{2n+1} \rightarrow \frac{1}{2} < 1$: elle converge.

Pour la seconde, $\sqrt[n]{u_n} = \left(1 + \frac{1}{n}\right)^n \rightarrow e > 1$: elle diverge (d'ailleurs $u_n \rightarrow +\infty$).

12 Convergence absolue



a. $\left|\frac{(-1)^n}{n^2}\right| = \frac{1}{n^2}$: absolument convergente, donc convergente.

b. $\left|\frac{\cos 3n}{n^3}\right| \leq \frac{1}{n^3}$: absolument convergente, donc convergente.

c. $\frac{1}{n}$ décroît vers 0 : la série converge d'après le critère des séries alternées. Mais $\sum \frac{1}{n}$ diverge : la convergence n'est pas absolue (semi-convergence).

13 Précision d'une somme alternée



Les $a_n = \frac{1}{2n+1}$ décroissent vers 0 : le critère des séries alternées s'applique et $|R_N| \leq a_{N+1} = \frac{1}{2N+3}$.

On veut $\frac{1}{2N+3} < 10^{-3}$, soit $2N+3 > 1000$, c'est-à-dire $N \geq 499$ (pour $N = 498$, $2N+3 = 999$ ne convient pas). Il suffit donc de prendre $N = 499$.

14 Produit de Cauchy de deux géométriques



Ici $c_n = \sum_{k=0}^n x^k x^{n-k} = (n+1)x^n$. Les séries $\sum x^n$ sont absolument convergentes ($|x| < 1$) : le théorème donne $\sum_{n \geq 0} (n+1)x^n = \left(\frac{1}{1-x}\right)^2$.

Avec $x = \frac{1}{2}$: $\sum_{n \geq 0} \frac{n+1}{2^n} = 2^2 = 4$.

15 Quand d'Alembert ne répond pas



Pour $u_n = \frac{1}{n}$, $\frac{u_{n+1}}{u_n} = \frac{n}{n+1} \rightarrow 1$. Pour $u_n = \frac{1}{n^2}$, $\frac{u_{n+1}}{u_n} = \left(\frac{n}{n+1}\right)^2 \rightarrow 1$.

Les deux rapports tendent vers 1, or la première série diverge et la seconde converge : lorsque la limite vaut 1, la règle de d'Alembert ne permet pas de conclure.

16 Série à paramètre



$$\frac{u_{n+1}}{u_n} = a \frac{(n+1)n^n}{(n+1)^{n+1}} = \frac{a}{(1+1/n)^n} \rightarrow \frac{a}{e}.$$

Si $a > e$, elle est > 1 : divergence.

Si $a = e$, $\frac{u_{n+1}}{u_n} = \frac{e}{(1+1/n)^n} > 1$ pour tout n : la suite (u_n) est strictement croissante et positive, donc ne tend pas vers 0 : divergence grossière.

17 Comparaison série-intégrale



Soit $f(x) = \frac{1}{x \ln x}$, positive et décroissante sur $[2, +\infty[$. Donc

$$\sum_{n=2}^N f(n) \geq \int_2^{N+1} f = \ln \ln(N+1) - \ln \ln 2 \rightarrow +\infty : \text{la première série diverge.}$$

Soit $g(x) = \frac{1}{x(\ln x)^2}$, positive et décroissante, de primitive $-\frac{1}{\ln x}$. Alors

$$\sum_{n=2}^N g(n) \leq g(2) + \int_2^N g = g(2) + \frac{1}{\ln 2} - \frac{1}{\ln N} \leq g(2) + \frac{1}{\ln 2}. \text{ Les sommes partielles sont majorées, donc la seconde série converge.}$$

18 Un contre-exemple alterné

★★★

On réduit : $u_n - \frac{(-1)^n}{\sqrt{n}} = (-1)^n \frac{\sqrt{n} - \sqrt{n} - (-1)^n}{\sqrt{n}(\sqrt{n} + (-1)^n)} = -\frac{((-1)^n)^2}{\sqrt{n}(\sqrt{n} + (-1)^n)} = -\frac{1}{\sqrt{n}(\sqrt{n} + (-1)^n)}$.

Notons $w_n = \frac{1}{\sqrt{n}(\sqrt{n} + (-1)^n)} > 0$; $w_n \sim \frac{1}{n}$, donc $\sum w_n$ diverge. Comme $\sum \frac{(-1)^n}{\sqrt{n}}$ converge (séries alternées) et que $u_n = \frac{(-1)^n}{\sqrt{n}} - w_n$, si $\sum u_n$ convergerait alors $\sum w_n$ convergerait : contradiction. Donc $\sum u_n$ diverge.

Cela ne contredit rien : les termes n'ont pas un signe constant, et le théorème d'équivalence ne s'applique qu'aux séries de signe constant.

19 Un produit de Cauchy divergent

★★★

$c_n = \sum_{k=0}^n a_k a_{n-k} = (-1)^n \sum_{k=0}^n \frac{1}{\sqrt{(k+1)(n-k+1)}}$ (car $(-1)^k (-1)^{n-k} = (-1)^n$).

Par l'inégalité arithmético-géométrique, $(k+1)(n-k+1) \leq \left(\frac{n+2}{2}\right)^2$, donc chaque terme de la somme est $\geq \frac{2}{n+2}$. La somme comporte $n+1$ termes : $|c_n| \geq \frac{2(n+1)}{n+2} \geq 1$ car $2n+2 \geq n+2$.

Ainsi c_n ne tend pas vers 0 : le produit de Cauchy diverge grossièrement, bien que $\sum a_n$ converge. L'absolue convergence est indispensable.

20 Reste de la série de Riemann d'exposant 2

★★★

Pour $n \geq 2$, $\frac{1}{n(n+1)} \leq \frac{1}{n^2} \leq \frac{1}{n(n-1)}$. On somme pour $n > N$ avec $\frac{1}{n(n+1)} = \frac{1}{n} - \frac{1}{n+1}$ et $\frac{1}{n(n-1)} = \frac{1}{n-1} - \frac{1}{n}$: les sommes télescopent et valent $\frac{1}{N+1}$ et $\frac{1}{N}$. Donc $\frac{1}{N+1} \leq R_N \leq \frac{1}{N}$.

Pour garantir $R_N \leq 10^{-2}$, il suffit de $N = 100$. La valeur $S_{100} \approx 1,6350$ approche alors la somme à moins de 0,01 (la somme vaut $\frac{\pi^2}{6} \approx 1,6449$).

Le livre d'exercices corrigés de maths Licence L2

Tout le programme en un seul PDF de 128 pages, à imprimer ou à garder sur ta tablette.

Voir le livre



Entraîne-toi : défi express de Licence L2

Changer de niveau

Niveau : Licence L2

6 questions au hasard, correction tout de suite.



Lancer le défi



Zyro te conseille la suite



Exercices de maths

Séries numériques : exercices de maths
Licence L2



QCM de maths

Séries numériques : QCM de maths
Licence L2



Contrôles de maths

Séries numériques : contrôle de maths
Licence L2



Exercices de maths

Séries entières : exercices de maths
Licence L2



Exercices de maths

Topologie des espaces métriques et
normés : exercices de maths Licence L2



QCM de maths

Séries entières : QCM de maths Licence
L2

Zyro vous emmène sur nos sites partenaires

Embarquez pour d'autres planètes du savoir et leurs applis.

Décollage