

Séries de Fourier : cours de maths Licence L3 à télécharger en PDF



Le livre de cours de maths Licence L3

Tout le programme en un seul PDF de 101 pages, à imprimer ou à garder sur ta tablette.

[Voir le livre](#)

Un son de violon, la température d'une barre métallique, une onde sur une corde : tous ces phénomènes périodiques ou presque se décomposent en **harmoniques simples**, sinus et cosinus de fréquences multiples. Ce chapitre construit cette décomposition, étudie en quel sens la série obtenue converge vers le signal, puis la met au travail sur des équations aux dérivées partielles.

1. Coefficients de Fourier

On considère des fonctions $f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{C}$ 2π -périodiques et continues par morceaux. Pour $n \in \mathbb{Z}$, on pose $e_n(t) = e^{int}$.

D

Coefficients de Fourier

Le coefficient de Fourier exponentiel d'indice n est

$$c_n(f) = \frac{1}{2\pi} \int_{-\pi}^{\pi} f(t) e^{-int} dt.$$

Les coefficients réels sont

$$a_n(f) = \frac{1}{\pi} \int_{-\pi}^{\pi} f(t) \cos(nt) dt, \quad b_n(f) = \frac{1}{\pi} \int_{-\pi}^{\pi} f(t) \sin(nt) dt.$$

On a $c_0 = \frac{a_0}{2}$ et, pour $n \geq 1$, $c_{\pm n} = \frac{a_n \mp i b_n}{2}$. La somme partielle d'ordre N est $S_N f(t) = \sum_{n=-N}^N c_n e^{int} = \frac{a_0}{2} + \sum_{n=1}^N (a_n \cos nt + b_n \sin nt)$.

Si f est paire, tous les b_n sont nuls ; si f est impaire, tous les a_n sont nuls. Pour une période $2L$, on remplace nt par $\frac{n\pi x}{L}$ et le facteur $\frac{1}{\pi}$ par $\frac{1}{L}$.

E

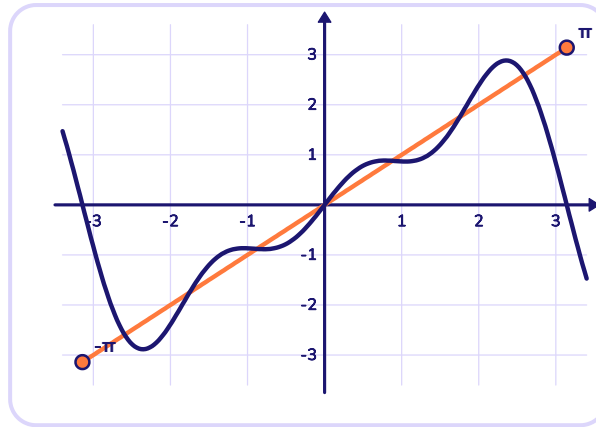
Exemple 1 : la rampe

Soit $f(t) = t$ sur $] -\pi, \pi[$, prolongée par périodicité. Elle est impaire, donc $a_n = 0$.

Par parties, pour $n \geq 1$:

$$b_n = \frac{2}{\pi} \int_0^{\pi} t \sin(nt) dt = \frac{2}{\pi} \left[-\frac{t \cos nt}{n} \right]_0^{\pi} = \frac{2(-1)^{n+1}}{n}.$$

Ainsi $S_3 f(t) = 2 \sin t - \sin 2t + \frac{2}{3} \sin 3t$.



E Exemple 2 : le créneau

Soit $g = -1$ sur $] -\pi, 0[$ et $g = 1$ sur $]0, \pi[$. Elle est impaire et

$$b_n = \frac{2}{\pi} \int_0^\pi \sin(nt) dt = \frac{2(1 - (-1)^n)}{n\pi}, \text{ soit } b_n = \frac{4}{n\pi} \text{ si } n \text{ est impair et } 0 \text{ sinon :}$$

$$g(t) \sim \frac{4}{\pi} \sum_{k=0}^{+\infty} \frac{\sin((2k+1)t)}{2k+1}.$$

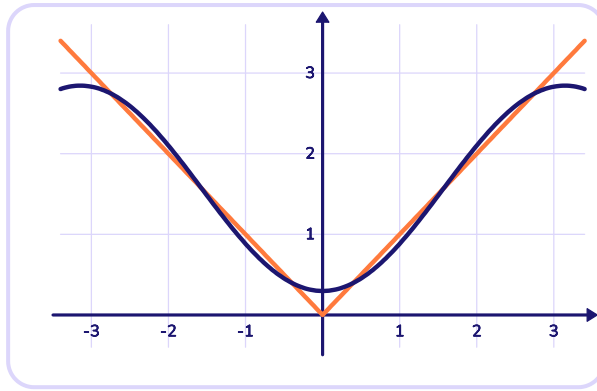
2. Convergence en moyenne quadratique

Sur l'espace des fonctions 2π -périodiques continues par morceaux, $\langle f, g \rangle = \frac{1}{2\pi} \int_{-\pi}^{\pi} f \bar{g}$ est un produit scalaire (hermitien) dès qu'on identifie deux fonctions qui diffèrent en un nombre fini de points, et $(e_n)_{n \in \mathbb{Z}}$ est une famille **orthonormée**. Alors $c_n(f) = \langle f, e_n \rangle$ et $S_N f$ est la **projection orthogonale** de f sur $\text{Vect}(e_{-N}, \dots, e_N)$: c'est la meilleure approximation de f par un polynôme trigonométrique de degré $\leq N$ pour la norme $\|f\|_2 = \sqrt{\langle f, f \rangle}$.

P Inégalité de Bessel et convergence L^2

$$\sum_{n=-N}^N |c_n|^2 \leq \|f\|_2^2 \text{ pour tout } N, \text{ et } \|f - S_N f\|_2 \rightarrow 0 \text{ quand } N \rightarrow +\infty.$$

La seconde assertion repose sur la densité des polynômes trigonométriques (voir la partie 5). Elle exprime que l'énergie de l'erreur tend vers 0, mais ne dit rien de la convergence en chaque point.



3. Théorème de Dirichlet et formule de Parseval

P Théorème de Dirichlet

Si f est 2π -périodique et de classe C^1 par morceaux, alors pour tout réel t ,

$$S_N f(t) \longrightarrow \frac{f(t^+) + f(t^-)}{2}.$$

En particulier la somme vaut $f(t)$ en tout point de continuité. Si de plus f est continue, la convergence est normale, donc uniforme sur $\mathbb{R}$.

P Formule de Parseval

Pour f continue par morceaux,

$$\frac{1}{2\pi} \int_{-\pi}^{\pi} |f(t)|^2 dt = \sum_{n \in \mathbb{Z}} |c_n|^2 = \frac{a_0^2}{4} + \frac{1}{2} \sum_{n=1}^{+\infty} (a_n^2 + b_n^2) \quad (f \text{ réelle}).$$

E

Exemple 3 : sommes célèbres

Pour la rampe, Parseval donne $\frac{1}{\pi} \int_{-\pi}^{\pi} t^2 dt = \frac{2\pi^2}{3} = \sum_{n \geq 1} \frac{4}{n^2}$, d'où

$\sum_{n=1}^{+\infty} \frac{1}{n^2} = \frac{\pi^2}{6}$. Pour le créneau, Dirichlet en $t = \frac{\pi}{2}$ donne

$$1 = \frac{4}{\pi} \left(1 - \frac{1}{3} + \frac{1}{5} - \dots \right), \text{ soit } \sum_{k=0}^{+\infty} \frac{(-1)^k}{2k+1} = \frac{\pi}{4}.$$



Erreur classique

La série de Fourier d'une fonction *continue* ne converge pas nécessairement en chaque point : il existe des contre-exemples. L'hypothèse « C^1 par morceaux » de Dirichlet n'est donc pas un détail.

4. Quelques coefficients à connaître

Signal sur] - \pi, \pi[	Coefficients	Somme de Parseval
t	$b_n = \frac{2(-1)^{n+1}}{n}$	$\sum \frac{1}{n^2} = \frac{\pi^2}{6}$
$ t $	$a_0 = \pi, a_n = \frac{-4}{\pi n^2} (n \text{ impair})$	$\sum_{n \text{ impair}} \frac{1}{n^4} = \frac{\pi^4}{96}$
t^2	$a_0 = \frac{2\pi^2}{3}, a_n = \frac{4(-1)^n}{n^2}$	$\sum \frac{1}{n^4} = \frac{\pi^4}{90}$

M

Méthode : calculer une série de Fourier

1. Rendre f 2π -périodique et repérer la parité pour annuler la moitié des coefficients.
2. Calculer a_n ou b_n par parties (ou c_n par une primitive de $e^{(\alpha-in)t}$).
3. Appliquer Dirichlet en un point bien choisi pour évaluer une série numérique.
4. Appliquer Parseval pour une série de carrés.

5. Noyau de Fejér et densité

La moyenne de Cesàro $\sigma_N f = \frac{S_0 f + \dots + S_N f}{N+1}$ s'écrit

$$\sigma_N f(t) = \sum_{|n| \leq N} \left(1 - \frac{|n|}{N+1}\right) c_n e^{int} = \frac{1}{2\pi} \int_{-\pi}^{\pi} f(t-s) F_N(s) ds, \text{ avec le noyau de Fejér}$$

$$F_N(s) = \sum_{|n| \leq N} \left(1 - \frac{|n|}{N+1}\right) e^{ins} = \frac{1}{N+1} \left(\frac{\sin \frac{(N+1)s}{2}}{\sin \frac{s}{2}} \right)^2 \geq 0.$$

Séries de Fourier Licence L3 : noyaux de Fejér F2, F6 et F15 sur l'intervalle de $-\pi$ à π , positifs et de plus en plus concentrés autour de zéro

P

Théorème de Fejér

Le noyau F_N est positif, de moyenne $\frac{1}{2\pi} \int F_N = 1$, et pour $0 < \delta \leq |s| \leq \pi$,
 $F_N(s) \leq \frac{1}{(N+1)\sin^2(\delta/2)} \rightarrow 0$. Par suite, si f est continue 2π -périodique,
 $\sigma_N f \rightarrow f$ uniformément.

Contrairement à $S_N f$, la suite $\sigma_N f$ converge pour toute fonction continue : les polynômes trigonométriques sont denses pour la norme uniforme, donc pour la norme L^2 , ce qui fournit la convergence quadratique et la formule de Parseval.

E

Exemple 4 : lissage de la rampe

Pour $f(t) = t$,

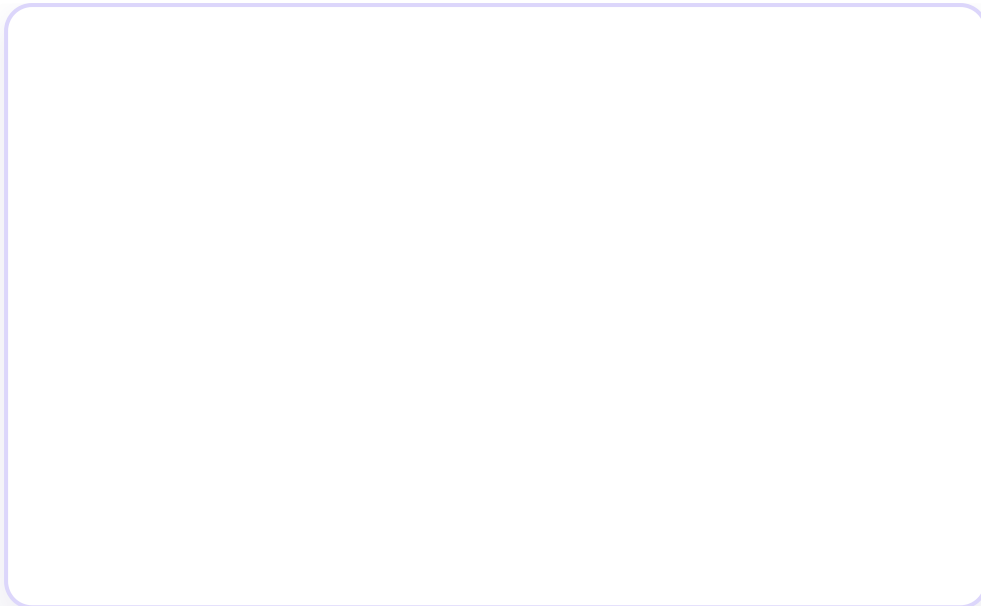
$\sigma_2 f(t) = \left(1 - \frac{1}{3}\right)2 \sin t + \left(1 - \frac{2}{3}\right)(-1) \sin 2t = \frac{4}{3} \sin t - \frac{1}{3} \sin 2t$. Les harmoniques élevés sont atténués.

6. Le phénomène de Gibbs

Près d'une discontinuité, la convergence ne peut être uniforme (une limite uniforme de fonctions continues est continue). Pour le créneau de hauteur ± 1 , les sommes partielles S_{2m-1} présentent un premier pic en $t = \frac{\pi}{2m}$, dont la hauteur tend vers

$$\frac{2}{\pi} \int_0^\pi \frac{\sin u}{u} du \approx 1,179$$

et non vers 1 : le dépassement d'environ **0,179**, soit près de **9 % du saut** (qui vaut 2), ne disparaît jamais, il se contente de se rapprocher de la discontinuité.



Séries de Fourier Licence L3 : phénomène de Gibbs sur le signal créneau, les sommes partielles S_3 , S_9 et S_{39} oscillent et dépassent d'environ 9 % le saut près de la discontinuité



Astuce de Zyro

Pour retrouver la position du pic, dérive la somme partielle : $S'_{2m-1}(t) = \frac{2}{\pi} \frac{\sin 2mt}{\sin t}$
s'annule d'abord en $\frac{\pi}{2m}$.

7. Applications aux équations aux dérivées partielles

La méthode de séparation des variables ramène une EDP linéaire à un problème de décomposition en série de Fourier.

E

Exemple 5 : équation de la chaleur

Une barre de longueur π , dont les extrémités sont maintenues à 0, obéit à

$\partial_t u = k \partial_{xx} u$ avec $u(0, t) = u(\pi, t) = 0$ et $u(x, 0) = \varphi(x)$. On décompose $\varphi(x) = \sum_{n \geq 1} b_n \sin nx$ (prolongement impair), avec $b_n = \frac{2}{\pi} \int_0^\pi \varphi(x) \sin nx \, dx$.

Chaque mode évolue indépendamment :

$$u(x, t) = \sum_{n=1}^{+\infty} b_n e^{-kn^2 t} \sin(nx).$$

Pour $\varphi(x) = x(\pi - x)$, on trouve $b_n = \frac{8}{\pi n^3}$ si n est impair et 0 sinon.

Séries de Fourier Licence L3 : profils de température d'une barre chauffée à $t = 0, 0,1, 0,4$ et 1, la solution de l'équation de la chaleur décroît et s'aplatit vers zéro

Les hautes fréquences s'éteignent en $e^{-kn^2 t}$: c'est l'effet régularisant de la chaleur. Pour la **corde vibrante** $\partial_{tt} u = c^2 \partial_{xx} u$, avec la même condition aux bords et vitesse initiale nulle, on obtient $u(x, t) = \sum b_n \cos(nct) \sin(nx)$: les modes ne s'amortissent pas, ils oscillent à la fréquence nc .

À retenir

- $c_n = \frac{1}{2\pi} \int_{-\pi}^{\pi} f(t) e^{-int} dt$; f paire donne $b_n = 0$, f impaire donne $a_n = 0$.
- $S_N f$ est la projection orthogonale sur les polynômes trigonométriques de degré $\leq N$: $\|f - S_N f\|_2 \rightarrow 0$.
- Dirichlet : si f est C^1 par morceaux, $S_N f(t) \rightarrow \frac{f(t^+) + f(t^-)}{2}$.
- Parseval : $\frac{1}{2\pi} \int |f|^2 = \sum |c_n|^2$; il fournit $\sum \frac{1}{n^2} = \frac{\pi^2}{6}$.
- Fejér : $F_N \geq 0$, de moyenne 1, et $\sigma_N f \rightarrow f$ uniformément si f est continue.
- Gibbs : près d'un saut, dépassement persistant d'environ 9 % du saut.
- Chaleur : $b_n e^{-kn^2 t} \sin nx$; corde : $b_n \cos(nct) \sin nx$.

Le livre de cours de maths Licence L3

Tout le programme en un seul PDF de 101 pages, à imprimer ou à garder sur ta tablette.

[Voir le livre](#)

  **Zyro te conseille la suite**

 Exercices de maths

Séries de Fourier : exercices de maths
Licence L3

 Contrôles de maths

Séries de Fourier : contrôle de maths
Licence L3

 QCM de maths

Séries de Fourier : QCM de maths
Licence L3

 Exercices de maths

Calcul différentiel dans R_n : exercices de
maths Licence L3

 Exercices de maths

Équations différentielles : exercices de
maths Licence L3

 Contrôles de maths

Calcul différentiel dans R_n : contrôle de
maths Licence L3

Zyro vous emmène sur nos sites partenaires

Embarquez pour d'autres planètes du savoir et leurs applis.

Décollage