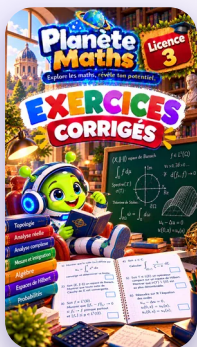


Séries de Fourier : exercices corrigés de maths Licence L3 à télécharger en PDF



Le livre d'exercices corrigés de maths Licence L3

Tout le programme en un seul PDF de 126 pages, à imprimer ou à garder sur ta tablette.

Voir le livre

Corrigés rédigés des exercices du chapitre. Vérifie chaque étape, puis corrige-toi.

1 Périodes et séries de Fourier



$\cos 2t$ a pour période π , donc 2π aussi ($2\pi = 2 \times \pi$). $\sin 3t$ a pour période $\frac{2\pi}{3}$, donc 2π aussi ($2\pi = 3 \times \frac{2\pi}{3}$). La somme est donc 2π -périodique.

Pour g : $g(t + 2\pi) = \cos\left(\frac{t}{2} + \pi\right) = -\cos\frac{t}{2} = -g(t) \neq g(t)$ (par exemple en $t = 0$: $g(2\pi) = -1 \neq 1$). g est 4π -périodique mais pas 2π -périodique.

2 Parité et coefficients nuls



f_1 est impaire : $a_n = 0$ pour tout n (seuls les b_n interviennent).

f_2 : produit de deux fonctions impaires, donc paire : $b_n = 0$ pour tout n .

f_3 n'est ni paire ni impaire. Mais $f_3 = t + t^2$ est somme d'une fonction impaire et d'une paire : les b_n viennent de t , les a_n de t^2 , et aucun coefficient n'est nul en général.

3 Polynôme trigonométrique



Par unicité des coefficients d'un polynôme trigonométrique : $a_0 = 6$, $a_1 = 2$, $b_2 = -4$, tous les autres sont nuls.

Ainsi $c_0 = \frac{a_0}{2} = 3$, $c_{\pm 1} = \frac{a_1}{2} = 1$ et $c_{\pm 2} = \frac{a_2 \mp ib_2}{2} = \mp \frac{i(-4)}{2} = \pm 2i$. Soit $c_2 = 2i$ et $c_{-2} = -2i$. Vérification : $-4 \sin 2t = 2i e^{2it} - 2i e^{-2it}$.

4 Un signal 0 - 1



$a_0 = \frac{1}{\pi} \int_0^\pi 1 dt = 1$. Pour $n \geq 1$, $a_n = \frac{1}{\pi} \int_0^\pi \cos nt dt = \frac{\sin n\pi}{n\pi} = 0$.

$b_n = \frac{1}{\pi} \int_0^\pi \sin nt dt = \frac{1 - (-1)^n}{n\pi}$. Donc $b_1 = \frac{2}{\pi}$, $b_2 = 0$, $b_3 = \frac{2}{3\pi}$.

5 Parseval pour un polynôme trigonométrique



Les coefficients sont $a_0 = 6$, $a_1 = 2$, $b_2 = -4$. Parseval :

$$\frac{a_0^2}{4} + \frac{1}{2} \sum (a_n^2 + b_n^2) = 9 + \frac{4 + 16}{2} = 9 + 10 = 19.$$

6 Valeur de la somme en un point



f est C^1 par morceaux : Dirichlet s'applique. En $\frac{\pi}{2}$, f est continue : somme $\frac{\pi}{2}$. En π , $f(\pi^-) = \pi$ et $f(\pi^+) = -\pi$: somme $\frac{\pi + (-\pi)}{2} = 0$. En $\frac{3\pi}{2}$, on a $f\left(\frac{3\pi}{2}\right) = f\left(-\frac{\pi}{2}\right) = -\frac{\pi}{2}$ par périodicité : somme $-\frac{\pi}{2}$.

7 Vrai ou faux ?



- (a) **Vrai** : $f(t) \sin nt$ est impaire, son intégrale sur $[-\pi, \pi]$ est nulle.
- (b) **Faux** : il existe des fonctions continues dont la série de Fourier diverge en un point ; il faut une hypothèse supplémentaire comme « C^1 par morceaux ».
- (c) **Vrai** : par Bessel, $\sum |c_n|^2$ converge, donc $c_n \rightarrow 0$.
- (d) **Vrai** : $a_0 = \frac{1}{\pi} \int f$ et l'intégrale d'une fonction impaire sur un intervalle symétrique est nulle.

8 Fourier de la parabole



f est paire : $b_n = 0$. $a_0 = \frac{1}{\pi} \int_{-\pi}^{\pi} t^2 dt = \frac{2\pi^2}{3}$. Pour $n \geq 1$, deux intégrations par parties donnent $a_n = \frac{2}{\pi} \int_0^{\pi} t^2 \cos nt dt = \frac{4(-1)^n}{n^2}$.

f est continue et C^1 par morceaux, donc $t^2 = \frac{\pi^2}{3} + 4 \sum_{n \geq 1} \frac{(-1)^n}{n^2} \cos nt$. En $t = 0$: $0 = \frac{\pi^2}{3} + 4 \sum \frac{(-1)^n}{n^2}$, donc $\sum \frac{(-1)^{n+1}}{n^2} = \frac{\pi^2}{12}$.

9 Période 2



f est impaire, $a_n = 0$.

$$b_n = 2 \int_0^1 x \sin(n\pi x) dx = 2 \left[-\frac{x \cos n\pi x}{n\pi} \right]_0^1 + 2 \int_0^1 \frac{\cos n\pi x}{n\pi} dx = \frac{-2(-1)^n}{n\pi} + 0 = \frac{2(-1)^{n+1}}{n\pi}$$

En $x = \frac{1}{2}$, f est continue et la somme vaut $\frac{1}{2}$: $\frac{1}{2} = \frac{2}{\pi} \left(1 - 0 - \frac{1}{3} + 0 + \frac{1}{5} - \dots \right)$, on retrouve $\frac{\pi}{4}$ pour la somme de Leibniz.

10 Énergie captée par S_3



$$b_1 = \frac{4}{\pi}, b_3 = \frac{4}{3\pi}, \text{ d'où } b_1^2 + b_3^2 = \frac{16}{\pi^2} \left(1 + \frac{1}{9} \right) = \frac{160}{9\pi^2} \approx 1,801.$$

$\frac{1}{\pi} \int g^2 = 2$. La proportion est $\frac{80}{9\pi^2} \approx 0,901$: S_3 capte environ 90 % de l'énergie du signal. Cela respecte Bessel ($1,801 \leq 2$) et l'erreur quadratique restante vaut $2 - 1,801 \approx 0,199$.

11 Moyenne de Cesàro de la rampe



Avec $b_1 = 2, b_2 = -1$: $S_2 f(t) = 2 \sin t - \sin 2t$. Les coefficients de Fejér sont $1 - \frac{n}{3}$:

$$\sigma_2 f(t) = \frac{2}{3} \cdot 2 \sin t + \frac{1}{3}(-1) \sin 2t = \frac{4}{3} \sin t - \frac{1}{3} \sin 2t.$$

En $t = \frac{\pi}{2}$: $S_2 f = 2, \sigma_2 f = \frac{4}{3}$, alors que $f\left(\frac{\pi}{2}\right) = \frac{\pi}{2} \approx 1,571$. Les erreurs sont $\approx 0,429$ pour S_2 et $\approx 0,237$ pour σ_2 : la moyenne de Cesàro est ici meilleure.

12 Chaleur dans une barre



Chaque mode évolue en $e^{-kn^2 t}$ avec $k = \frac{1}{4}$: $u(x, t) = 3e^{-t/4} \sin x + 5e^{-4t} \sin 4x$.

En $x = \frac{\pi}{2}$: $\sin \frac{\pi}{2} = 1, \sin 2\pi = 0$; donc $u\left(\frac{\pi}{2}, 1\right) = 3e^{-1/4} \approx 2,336$.

$$5e^{-4t} < 0,01 \iff e^{-4t} < 0,002 \iff t > \frac{\ln 500}{4} \approx 1,554.$$

13 Leibniz par Dirichlet

★★★

En $t = 0$, les sinus sont nuls : la série vaut $\frac{1}{2}$, ce qui est bien $\frac{f(0^+) + f(0^-)}{2} = \frac{1+0}{2}$: cohérent avec Dirichlet.

En $t = \frac{\pi}{2}$, f est continue de valeur 1 et $\sin \frac{(2k+1)\pi}{2} = (-1)^k : 1 = \frac{1}{2} + \frac{2}{\pi} \sum \frac{(-1)^k}{2k+1}$, soit $\sum \frac{(-1)^k}{2k+1} = \frac{\pi}{4}$.

14 Le noyau de Fejér F_1

★★★

Par la définition, $F_1(t) = 1 + \left(1 - \frac{1}{2}\right)(e^{it} + e^{-it}) = 1 + \cos t$. Par la formule, $F_1(t) = \frac{1}{2} \left(\frac{\sin t}{\sin(t/2)}\right)^2 = \frac{1}{2} (2 \cos \frac{t}{2})^2 = 2 \cos^2 \frac{t}{2} = 1 + \cos t$: les deux expressions concordent.

$1 + \cos t \geq 0$; la moyenne $\frac{1}{2\pi} \int_{-\pi}^{\pi} (1 + \cos t) dt = 1$.

$\sigma_1 f(t) = \left(1 - \frac{1}{2}\right) \cdot 2 \sin t = \sin t$.

15 Série de $|\sin t|$

★★★★

f est paire, π -périodique : $b_n = 0$. $a_0 = \frac{2}{\pi} \int_0^{\pi} \sin t dt = \frac{4}{\pi}$. Pour $n \neq 1$,

$$a_n = \frac{2}{\pi} \int_0^{\pi} \sin t \cos nt dt = \frac{1}{\pi} \int_0^{\pi} [\sin(n+1)t - \sin(n-1)t] dt = \frac{1}{\pi} \left[\frac{1 - (-1)^{n+1}}{n+1} - \frac{1}{n-1} \right]$$

Si n est impair ($\neq 1$), $a_n = 0$; $a_1 = \frac{2}{\pi} \int_0^{\pi} \sin t \cos t dt = 0$. Si $n = 2k$,

$$a_{2k} = \frac{2}{\pi} \left(\frac{1}{2k+1} - \frac{1}{2k-1} \right) = \frac{-4}{\pi(4k^2 - 1)}.$$

Donc $|\sin t| = \frac{2}{\pi} - \frac{4}{\pi} \sum_{k \geq 1} \frac{\cos 2kt}{4k^2 - 1}$ (convergence normale). En $t = \frac{\pi}{2}$, $\cos k\pi = (-1)^k$

$$: 1 = \frac{2}{\pi} - \frac{4}{\pi} \sum \frac{(-1)^k}{4k^2 - 1}, \text{ d'où } \sum \frac{(-1)^k}{4k^2 - 1} = \frac{1}{2} - \frac{\pi}{4} \approx -0,285.$$

16 Parseval et $\zeta(4)$

★★★★

$$\frac{1}{\pi} \int_{-\pi}^{\pi} t^2 dt = \frac{2\pi^2}{3}. \text{ Parseval : } \frac{\pi^2}{2} + \frac{16}{\pi^2} \sum_{n \text{ impair}} \frac{1}{n^4} = \frac{2\pi^2}{3}, \text{ donc } \frac{16}{\pi^2} \sum = \frac{\pi^2}{6} \text{ et } \sum_{n \text{ impair}} \frac{1}{n^4} = \frac{\pi^4}{96}.$$

$$\text{Soit } Z = \sum_{n \geq 1} \frac{1}{n^4}. \text{ Les termes pairs valent } \sum \frac{1}{(2m)^4} = \frac{Z}{16}, \text{ donc } Z = \frac{\pi^4}{96} + \frac{Z}{16} \text{ et } Z = \frac{16}{15} \cdot \frac{\pi^4}{96} = \frac{\pi^4}{90}.$$

17 Hauteur du premier pic de Gibbs

★★★★

$$(a) S'_{2m-1}(t) = \frac{4}{\pi} \sum_{k=0}^{m-1} \cos((2k+1)t). \text{ Or}$$

$$2 \sin t \sum_{k=0}^{m-1} \cos((2k+1)t) = \sum [\sin((2k+2)t) - \sin(2kt)] = \sin 2mt \text{ (somme télescopique). Donc } S'_{2m-1} = \frac{4}{\pi} \cdot \frac{\sin 2mt}{2 \sin t} = \frac{2 \sin 2mt}{\pi \sin t}.$$

$$(b) \text{ La dérivée s'annule d'abord en } t = \frac{\pi}{2m} = \frac{\pi}{4} \text{ en passant de positive à négative : c'est un maximum. } S_3\left(\frac{\pi}{4}\right) = \frac{4}{\pi} \left(\frac{\sqrt{2}}{2} + \frac{1}{3} \cdot \frac{\sqrt{2}}{2} \right) = \frac{8\sqrt{2}}{3\pi} \approx 1,200, \text{ supérieur à } 1,179 \text{ (la valeur limite) et à } 1 : \text{ le dépassement est déjà là.}$$

18 Corde vibrante

★★★★

Ici $c = 2$ et vitesse nulle : $u(x, t) = 2 \cos(4t) \sin 2x + \cos(6t) \sin 3x$.

$\cos 4t$ a pour période $\frac{\pi}{2}$ et $\cos 6t$ pour période $\frac{\pi}{3}$. Leur plus petit multiple commun est π ($= 2 \cdot \frac{\pi}{2} = 3 \cdot \frac{\pi}{3}$) : u est π -périodique en t .

$$u\left(\frac{\pi}{4}, \frac{\pi}{6}\right) = 2 \cos \frac{2\pi}{3} \sin \frac{\pi}{2} + \cos \pi \sin \frac{3\pi}{4} = 2 \cdot \left(-\frac{1}{2}\right) \cdot 1 - \frac{\sqrt{2}}{2} = -1 - \frac{\sqrt{2}}{2} \approx -1,707$$

19 La majoration du noyau de Fejér

★★★★

On a $F_N(s) = \frac{\sin^2 \frac{(N+1)s}{2}}{(N+1) \sin^2 \frac{s}{2}} \leq \frac{1}{(N+1) \sin^2 \frac{s}{2}}$. Pour $\frac{\delta}{2} \leq \frac{|s|}{2} \leq \frac{\pi}{2}$, $|\sin|$ est croissante, donc $\sin^2 \frac{s}{2} \geq \sin^2 \frac{\delta}{2}$, d'où la majoration annoncée.

Pour $\delta = \frac{\pi}{2}$: $\sin^2 \frac{\pi}{4} = \frac{1}{2}$ et $F_{99}(s) \leq \frac{1}{100 \times \frac{1}{2}} = 0,02$. La partie de l'intégrale hors de $[-\delta, \delta]$ a une longueur $\leq 2\pi$, donc $\frac{1}{2\pi} \int_{\delta \leq |s| \leq \pi} F_{99} \leq \frac{1}{2\pi} \cdot 2\pi \cdot 0,02 = 0,02$: la masse hors d'un voisinage de 0 devient négligeable.

20 Convergence normale pour une fonction C^1

★★★★

(a) Par intégration par parties (périodicité) : $c_n(f') = in c_n(f)$.

(b) Parseval pour f' : $\sum n^2 |c_n(f)|^2 = \|f'\|_2^2 < +\infty$. Cauchy-Schwarz :

$$\sum_{n \neq 0} |c_n| = \sum_{n \neq 0} \frac{1}{|n|} \cdot |n| |c_n| \leq \left(\sum_{n \neq 0} \frac{1}{n^2} \right)^{1/2} \left(\sum n^2 |c_n|^2 \right)^{1/2}, \text{ fini.}$$

(c) $\sum_{n \neq 0} \frac{1}{n^2} = \frac{\pi^2}{3}$, donc $\sum_{n \neq 0} |c_n| \leq \sqrt{\frac{\pi^2}{3}} \times 3 = \pi$. La série de Fourier converge normalement vers f .

21 Développement de $\cos(t/2)$

★★★★

f est paire donc $b_n = 0$, continue, C^1 par morceaux.

$$a_0 = \frac{1}{\pi} \int_{-\pi}^{\pi} \cos \frac{t}{2} dt = \frac{1}{\pi} \left[2 \sin \frac{t}{2} \right]_{-\pi}^{\pi} = \frac{4}{\pi}.$$

$$a_n = \frac{1}{\pi} \int_{-\pi}^{\pi} \cos \frac{t}{2} \cos nt dt = \frac{1}{\pi} \left[\frac{\sin(n + \frac{1}{2})\pi}{n + \frac{1}{2}} + \frac{\sin(n - \frac{1}{2})\pi}{n - \frac{1}{2}} \right] \text{ avec}$$

$\sin(n + \frac{1}{2})\pi = (-1)^n$ et $\sin(n - \frac{1}{2})\pi = (-1)^{n+1}$. Donc

$$a_n = \frac{(-1)^n}{\pi} \left(\frac{1}{n + \frac{1}{2}} - \frac{1}{n - \frac{1}{2}} \right) = \frac{4(-1)^{n+1}}{\pi(4n^2 - 1)}.$$

En $t = \pi$: $\cos \frac{\pi}{2} = 0 = \frac{2}{\pi} + \frac{4}{\pi} \sum \frac{(-1)^{n+1}(-1)^n}{4n^2 - 1} = \frac{2}{\pi} - \frac{4}{\pi} \sum \frac{1}{4n^2 - 1}$. Donc

$$\sum \frac{1}{4n^2 - 1} = \frac{1}{2} \text{ (on le vérifie par télescopage de } \frac{1}{2} \left(\frac{1}{2n-1} - \frac{1}{2n+1} \right) \text{).}$$

Le livre d'exercices corrigés de maths Licence L3

Tout le programme en un seul PDF de 126 pages, à imprimer ou à garder sur ta tablette.

Voir le livre

Zyro te conseille la suite

Exercices de maths

Séries de Fourier : exercices de maths
Licence L3

QCM de maths

Séries de Fourier : QCM de maths
Licence L3

Contrôles de maths

Séries de Fourier : contrôle de maths
Licence L3

Exercices de maths

Calcul différentiel dans $\mathbb{R}^n$: exercices de
maths Licence L3

 Exercices de maths

Équations différentielles : exercices de maths Licence L3

 QCM de maths

Calcul différentiel dans $\mathbb{R}^n$: QCM de maths Licence L3

Zyro vous emmène sur nos sites partenaires

Embarquez pour d'autres planètes du savoir et leurs applis.

Décollage