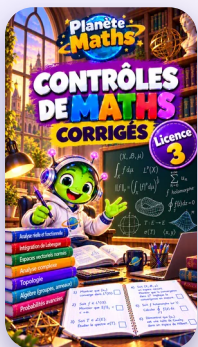


Séries de Fourier : corrigé du contrôle de maths Licence L3 à télécharger en PDF



Le livre de contrôles corrigés de maths Licence L3

Tout le programme en un seul PDF de 52 pages, à imprimer ou à garder sur ta tablette.

[Voir le livre](#)

Corrigé du contrôle avec le barème détaillé. Compte tes points et repère ce qu'il faut revoir.

Durée conseillée : 45 minutes. Barème sur 20 points. Calculatrice autorisée seulement quand l'énoncé le précise.

1 Fourier de l'exponentielle

/ 6 pts

(a) $c_n = \frac{1}{2\pi} \int_{-\pi}^{\pi} e^{(1-in)t} dt = \frac{1}{2\pi} \cdot \frac{e^{(1-in)\pi} - e^{-(1-in)\pi}}{1-in}$ (1 pt). Comme $e^{\mp in\pi} = (-1)^n$, on obtient $c_n = \frac{(-1)^n \sinh \pi}{\pi(1-in)}$ (1 pt).

(b) $c_n = \frac{(-1)^n \sinh \pi (1+in)}{\pi(1+n^2)}$. Comme $c_n = \frac{a_n - ib_n}{2}$, $a_n = \frac{2(-1)^n \sinh \pi}{\pi(1+n^2)}$ (1 pt) et $b_n = \frac{-2n(-1)^n \sinh \pi}{\pi(1+n^2)}$ (1 pt).

(c) En $t = \pi$, la série vaut $\frac{f(\pi^-) + f(\pi^+)}{2} = \frac{e^\pi + e^{-\pi}}{2} = \cosh \pi$ (1 pt). Or $\sum c_n e^{in\pi} = \frac{\sinh \pi}{\pi} \sum \frac{1+in}{1+n^2} = \frac{\sinh \pi}{\pi} \sum \frac{1}{1+n^2}$ (la partie impaire s'annule), d'où $\sum_{n \in \mathbb{Z}} \frac{1}{1+n^2} = \pi \coth \pi \approx 3,153$ (1 pt).

2 Polynôme trigonométrique et Parseval

/ 4 pts

$\sin^2 t = \frac{1 - \cos 2t}{2}$, donc $g = \frac{\cos t}{2} - \frac{\cos 2t \cos t}{2}$ (1 pt). Avec $\cos 2t \cos t = \frac{\cos 3t + \cos t}{2}$, on obtient $g(t) = \frac{1}{4} \cos t - \frac{1}{4} \cos 3t$ (1 pt).

Coefficients : $a_1 = \frac{1}{4}$, $a_3 = -\frac{1}{4}$, tous les autres nuls (1 pt).

Parseval : $\frac{1}{2} \left(\frac{1}{16} + \frac{1}{16} \right) = \frac{1}{16}$ (1 pt).

3 Le noyau de Fejér F_2

/ 3 pts

(a) $F_2(s) = 1 + \left(1 - \frac{1}{3}\right) 2 \cos s + \left(1 - \frac{2}{3}\right) 2 \cos 2s = 1 + \frac{4}{3} \cos s + \frac{2}{3} \cos 2s$ (1 pt).

(b) $F_2(0) = 1 + \frac{4}{3} + \frac{2}{3} = 3 = N + 1$ (1 pt).

(c) $F_2(\pi) = 1 - \frac{4}{3} + \frac{2}{3} = \frac{1}{3}$. Par la formule : $\frac{1}{3} \left(\frac{\sin(3\pi/2)}{\sin(\pi/2)} \right)^2 = \frac{1}{3}$: les deux résultats concordent (1 pt).

4 Chaleur dans une barre

/ 4 pts

(a) $\cos^2 x = \frac{1 + \cos 2x}{2}$, donc $u(x, 0) = \frac{\sin x}{2} + \frac{\sin x \cos 2x}{2}$. Or
 $\sin x \cos 2x = \frac{\sin 3x - \sin x}{2}$. Donc $u(x, 0) = \frac{1}{4}\sin x + \frac{1}{4}\sin 3x$ (2 pts).

(b) Avec $k = \frac{1}{2}$: $u(x, t) = \frac{1}{4}e^{-t/2}\sin x + \frac{1}{4}e^{-9t/2}\sin 3x$ (1 pt).

(c) $\sin \frac{\pi}{2} = 1$, $\sin \frac{3\pi}{2} = -1$: $u = \frac{1}{4}e^{-0,5} - \frac{1}{4}e^{-4,5} \approx 0,1516 - 0,0028 \approx 0,149$ (1 pt).

5 Gibbs sur le créneau

/ 3 pts

$$S_5\left(\frac{\pi}{2}\right) = \frac{4}{\pi}\left(1 - \frac{1}{3} + \frac{1}{5}\right) = \frac{4}{\pi} \cdot \frac{13}{15} = \frac{52}{15\pi} \approx 1,1035, \text{ écart} \approx 0,10 \text{ avec } 1 \text{ (1 pt)}.$$

$$S_5\left(\frac{\pi}{10}\right) = \frac{4}{\pi}\left(\sin 18^\circ + \frac{1}{3}\sin 54^\circ + \frac{1}{5}\sin 90^\circ\right) \approx \frac{4}{\pi}(0,3090 + 0,2697 + 0,2) \approx 0,99 \text{ (1 pt)}.$$

Commentaire : S_5 passe de 0,99 en $\frac{\pi}{10}$ à 1,10 en $\frac{\pi}{2}$; son pic est en $\frac{\pi}{6}$, où

$$S_5\left(\frac{\pi}{6}\right) = \frac{56}{15\pi} \approx 1,188 > 1,179 : \text{c'est le dépassement de Gibbs (1 pt)}.$$

Le livre de contrôles corrigés de maths Licence L3

Tout le programme en un seul PDF de 52 pages, à imprimer ou à garder sur ta tablette.

Voir le livre

 Zyro te conseille la suite

 Contrôles de maths

Séries de Fourier : contrôle de maths
Licence L3

 Cours de maths

Séries de Fourier : cours de maths
Licence L3

 QCM de maths

Séries de Fourier : QCM de maths
Licence L3

 Contrôles de maths

Calcul différentiel dans $\mathbb{R}^n$: contrôle de
maths Licence L3

 Contrôles de maths

Équations différentielles : contrôle de
maths Licence L3

 Cours de maths

Calcul différentiel dans $\mathbb{R}^n$: cours de
maths Licence L3

Zyro vous emmène sur nos sites partenaires

Embarquez pour d'autres planètes du savoir et leurs applis.

Décollage