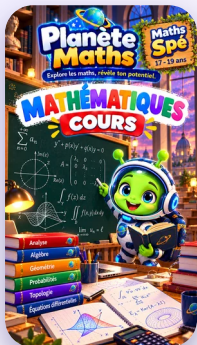


Séries entières : cours de maths Maths Spé à télécharger en PDF



Le livre de cours de maths Maths Spé

Tout le programme en un seul PDF de 103 pages, à imprimer ou à garder sur ta tablette.

[Voir le livre](#)

Une série entière est un « polynôme de degré infini » : une somme $\sum a_n z^n$ dont on étudie la convergence et dont on fait un objet de calcul. Ce chapitre fournit l'outil qui permet de calculer des sommes, de résoudre des équations différentielles et de définir proprement l'exponentielle complexe.

1. Séries entières et lemme d'Abel

D

Série entière

Soit $(a_n)_{n \geq 0}$ une suite de nombres complexes. On appelle **série entière** de coefficients a_n la série de fonctions $\sum_{n \geq 0} a_n z^n$ de la variable $z \in \mathbb{C}$ (ou $x \in \mathbb{R}$ lorsqu'on se limite au cas réel).

Pour chaque valeur de z , on se demande si la série numérique $\sum a_n z^n$ converge. Le résultat fondamental est le suivant.

P**Lemme d'Abel**

Si la suite $(a_n z_0^n)$ est bornée, alors pour tout complexe z tel que $|z| < |z_0|$, la série $\sum a_n z^n$ converge absolument.

Preuve. Soit M un majorant de $|a_n z_0^n|$. Alors $|a_n z^n| \leq M \left| \frac{z}{z_0} \right|^n$, terme général d'une série géométrique convergente puisque $\left| \frac{z}{z_0} \right| < 1$. Le théorème de comparaison conclut.

D**Rayon de convergence**

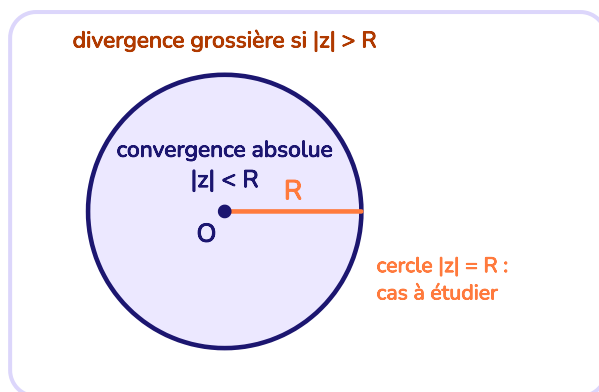
Le **rayon de convergence** de $\sum a_n z^n$ est

$$R = \sup \{ r \geq 0 : (a_n r^n) \text{ est bornée} \} \in [0; +\infty].$$

2. Disque de convergence**P****Disque de convergence**

Si R est le rayon de convergence de $\sum a_n z^n$:

- si $|z| < R$, la série converge absolument ;
- si $|z| > R$, la série diverge grossièrement (le terme général ne tend pas vers 0) ;
- si $|z| = R$, aucune conclusion générale n'est possible.



Sur la droite réelle, le disque devient l'**intervalle de convergence** $] -R ; R[$, dont les bornes se traitent séparément.



Sur le cercle $|z| = R$, tout peut arriver. Les trois séries $\sum z^n$, $\sum \frac{z^n}{n}$ et $\sum \frac{z^n}{n^2}$ ont toutes pour rayon 1 ; la première diverge en tout point du cercle, la deuxième converge en $z = -1$ et diverge en $z = 1$, la troisième converge en tout point du cercle.

M Calculer un rayon de convergence

1. **Règle de d'Alembert.** Si les a_n sont non nuls et si $\left| \frac{a_{n+1}}{a_n} \right| \rightarrow \ell \in [0 ; +\infty]$, alors $R = \frac{1}{\ell}$ (avec $1/0 = +\infty$ et $1/+\infty = 0$).
2. **Comparaison.** Si $|a_n| \leq |b_n|$ alors $R_a \geq R_b$; si $a_n = O(b_n)$, même conclusion.
3. **Séries lacunaires.** Si certains coefficients sont nuls, on pose une nouvelle variable (par exemple $t = z^2$) pour revenir à une série sans trous.



Erreur classique

La règle de d'Alembert ne s'applique pas directement à $\sum z^{2n}$: un coefficient sur deux est nul et le quotient a_{n+1}/a_n n'existe pas. On pose $t = z^2$ et on revient au rayon en t .

E

Exemple 1

Rayon de $\sum \frac{n}{3^n} z^n$. Ici $a_n = \frac{n}{3^n}$, donc $\left| \frac{a_{n+1}}{a_n} \right| = \frac{n+1}{3n} \rightarrow \frac{1}{3}$. Ainsi $R = 3$.

E

Exemple 2

Rayon de $\sum \frac{z^{2n}}{5^n}$. Avec $t = z^2$, la série $\sum (t/5)^n$ converge si et seulement si $|t| < 5$.
Donc la série converge pour $|z|^2 < 5$ et diverge pour $|z|^2 > 5$: $R = \sqrt{5}$.

3. Opérations sur les séries entières

P

Somme et produit

Soient $\sum a_n z^n$ et $\sum b_n z^n$ de rayons R_a et R_b .

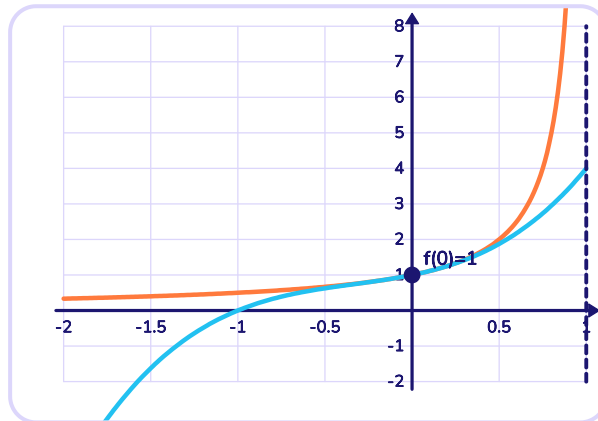
- **Somme** : $\sum (a_n + b_n) z^n$ a un rayon $R \geq \min(R_a, R_b)$, avec égalité si $R_a \neq R_b$.
- **Produit de Cauchy** : pour $|z| < \min(R_a, R_b)$, $(\sum a_n z^n)(\sum b_n z^n) = \sum c_n z^n$ avec $c_n = \sum_{k=0}^n a_k b_{n-k}$. Le rayon du produit est au moins $\min(R_a, R_b)$.

E

Exemple 3

Avec $a_n = b_n = 1$, on a $c_n = \sum_{k=0}^n 1 = n + 1$. Donc pour $|z| < 1$,

$$\sum_{n=0}^{+\infty} (n+1)z^n = \left(\frac{1}{1-z} \right)^2 = \frac{1}{(1-z)^2}.$$



La figure ci-dessus compare la fonction $x \mapsto \frac{1}{1-x}$ à la somme partielle $1 + x + x^2 + x^3$: l'approximation est excellente près de 0 et se dégrade lorsque x approche de la borne 1 du rayon.

4. Dérivation et intégration terme à terme

P

Dérivation et intégration

Soit $f(x) = \sum_{n \geq 0} a_n x^n$ de rayon $R > 0$. La série dérivée $\sum n a_n x^{n-1}$ et la série des primitives $\sum \frac{a_n}{n+1} x^{n+1}$ ont le même rayon R . De plus, sur $] -R; R[$:

- f est de classe $\mathcal{C}^\infty$ et $f'(x) = \sum_{n \geq 1} n a_n x^{n-1}$;
- $\int_0^x f(t) dt = \sum_{n \geq 0} \frac{a_n}{n+1} x^{n+1}$;
- $f^{(k)}(0) = k! a_k$: les coefficients sont **uniques**.

Conséquence pratique : on obtient de nouveaux développements en dérivant ou en intégrant des développements connus, sans changer le rayon.

Exemple 4 (intégration)

Pour $|t| < 1$, $\frac{1}{1+t} = \sum_{n \geq 0} (-1)^n t^n$. On intègre de 0 à x :

$$\ln(1+x) = \sum_{n \geq 1} (-1)^{n-1} \frac{x^n}{n}, \quad |x| < 1.$$

5. Fonction développable en série entière

Développable en série entière

Une fonction f définie sur $] -r ; r[$ est **développable en série entière en 0** s'il existe une série entière de rayon $R \geq r$ dont la somme vaut $f(x)$ pour tout $x \in] -r ; r[$.

Si f est développable en série entière, elle est de classe $\mathcal{C}^\infty$ et ses coefficients sont nécessairement $a_n = \frac{f^{(n)}(0)}{n!}$: le développement n'est autre que la série de Taylor. La réciproque est fausse.

Série de Taylor n'est pas somme

La fonction $f(x) = e^{-1/x^2}$ pour $x \neq 0$, $f(0) = 0$, est de classe $\mathcal{C}^\infty$ avec $f^{(n)}(0) = 0$ pour tout n . Sa série de Taylor est nulle, mais f ne l'est pas : f n'est pas développable en série entière.

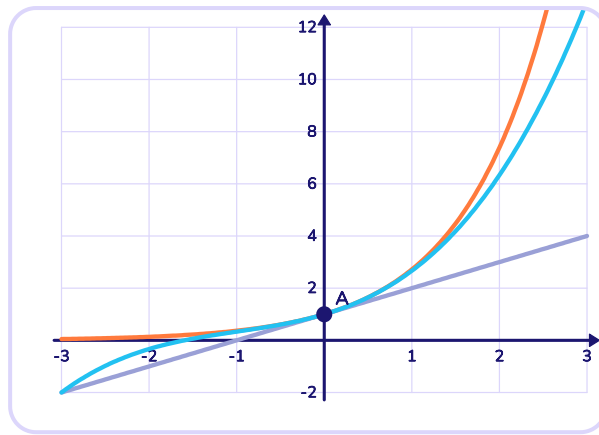
M**Prouver qu'une fonction est développable**

1. Reconnaître une combinaison, un produit, une dérivée ou une primitive de développements usuels ;
2. ou montrer que le reste de Taylor $R_n(x) = f(x) - \sum_{k \leq n} \frac{f^{(k)}(0)}{k!} x^k$ tend vers 0 (par exemple avec l'inégalité de Taylor–Lagrange) ;
3. ou résoudre une équation différentielle vérifiée par f (voir la partie 8).

6. Développements usuels

Fonction	Développement en série entière	Rayon
e^x	$\sum_{n \geq 0} \frac{x^n}{n!}$	$+\infty$
$\cos x$	$\sum_{n \geq 0} (-1)^n \frac{x^{2n}}{(2n)!}$	$+\infty$
$\sin x$	$\sum_{n \geq 0} (-1)^n \frac{x^{2n+1}}{(2n+1)!}$	$+\infty$
$\operatorname{ch} x$	$\sum_{n \geq 0} \frac{x^{2n}}{(2n)!}$	$+\infty$
$\operatorname{sh} x$	$\sum_{n \geq 0} \frac{x^{2n+1}}{(2n+1)!}$	$+\infty$
$\frac{1}{1-x}$	$\sum_{n \geq 0} x^n$	1
$\ln(1+x)$	$\sum_{n \geq 1} (-1)^{n-1} \frac{x^n}{n}$	1
$\arctan x$	$\sum_{n \geq 0} (-1)^n \frac{x^{2n+1}}{2n+1}$	1
$(1+x)^\alpha, \alpha \notin \mathbb{N}$	$1 + \sum_{n \geq 1} \frac{\alpha(\alpha-1) \cdots (\alpha-n+1)}{n!} x^n$	1

La figure suivante montre comment les sommes partielles de la série de l'exponentielle collent à la courbe de plus en plus loin de l'origine lorsque le degré augmente.



Astuce de Zyro

Sur ma planète, on retient les développements par parité : **cos** et **ch** n'ont que des puissances paires, **sin** et **sh** que des puissances impaires. Une fonction paire n'a jamais de terme impair !

7. Exponentielle complexe



Exponentielle complexe

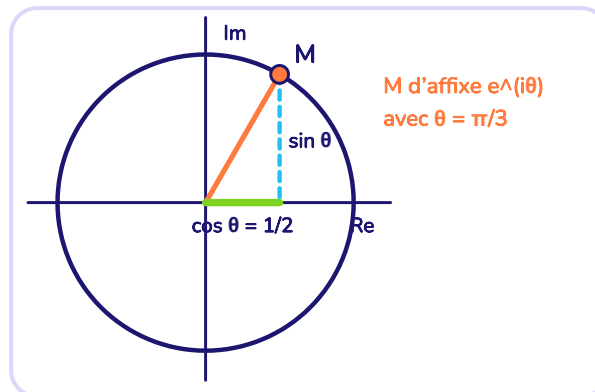
Pour tout $z \in \mathbb{C}$, on pose $e^z = \sum_{n=0}^{+\infty} \frac{z^n}{n!}$. Le rayon de convergence est $+\infty$ (d'Alembert : $\frac{1}{n+1} \rightarrow 0$).



Propriétés

- $e^{z+w} = e^z e^w$ pour tous complexes z, w (produit de Cauchy et formule du binôme) ; en particulier $e^z \neq 0$ et $\frac{1}{e^z} = e^{-z}$;
- formule d'Euler : $e^{i\theta} = \cos \theta + i \sin \theta$ pour tout réel θ ;
- $e^{x+iy} = e^x (\cos y + i \sin y)$: $|e^z| = e^{\operatorname{Re} z}$ et $\arg e^z = \operatorname{Im} z [2\pi]$.

La formule d'Euler vient du regroupement des termes pairs et impairs : $i^{2n} = (-1)^n$ et $i^{2n+1} = i(-1)^n$, donc les termes pairs de $\sum \frac{(i\theta)^n}{n!}$ forment le développement de $\cos \theta$ et les termes impairs celui de $i \sin \theta$.



E Exemple 5

Résoudre $e^z = -e$. On écrit $-e = e \cdot e^{i\pi} = e^{1+i\pi}$. Comme $e^z = e^{z'}$ équivaut à $z - z' \in 2i\pi\mathbb{Z}$, les solutions sont $z = 1 + i\pi + 2ik\pi$, $k \in \mathbb{Z}$.

I 8. Résolution d'équations différentielles

M Méthode des coefficients indéterminés

1. On cherche une solution $y = \sum a_n x^n$ de rayon $R > 0$ (analyse) ;
2. on dérive terme à terme, on reporte dans l'équation et on identifie les coefficients de x^n : on obtient une **relation de récurrence** sur (a_n) ;
3. on calcule a_n à l'aide des conditions initiales, puis le rayon (synthèse) ;
4. on reconnaît la somme, en général à l'aide des développements usuels.

E

Exemple 6

Résoudre $y' - 2xy = 0$, $y(0) = 1$. Avec $y = \sum a_n x^n$, on a $y' = \sum (n+1)a_{n+1}x^n$ et $2xy = \sum 2a_{n-1}x^n$ (avec $a_{-1} = 0$). L'identification donne $a_0 = 1$, $a_1 = 0$ et $(n+1)a_{n+1} = 2a_{n-1}$. Les coefficients impairs sont nuls, et pour les pairs $(2p+2)a_{2p+2} = 2a_{2p}$, c'est-à-dire $a_{2p+2} = \frac{a_{2p}}{p+1}$, d'où $a_{2p} = \frac{1}{p!}$. Le rayon est $+\infty$ et $y(x) = \sum_{p \geq 0} \frac{(x^2)^p}{p!} = e^{x^2}$.

L'unicité de la solution du problème de Cauchy pour une équation linéaire (théorème de Cauchy–Lipschitz) garantit que la solution trouvée est la seule.

À retenir

- Le rayon R d'une série entière partage le plan en trois zones : convergence absolue pour $|z| < R$, divergence grossière pour $|z| > R$, cas à étudier pour $|z| = R$.
- Pour calculer R : règle de d'Alembert, comparaison, changement de variable pour les séries lacunaires.
- Somme et produit de Cauchy : rayon $\geq \min(R_a, R_b)$.
- Dériver ou intégrer terme à terme ne change pas le rayon ; $a_n = \frac{f^{(n)}(0)}{n!}$ donc les coefficients sont uniques.
- Être $\mathcal{C}^\infty$ ne suffit pas pour être développable en série entière.
- Connaître les développements usuels (e^x , $\cos$, $\sin$, ch , sh , $\frac{1}{1-x}$, $\ln(1+x)$, $\arctan$, $(1+x)^\alpha$) et leurs rayons.
- $e^z = \sum \frac{z^n}{n!}$ sur $\mathbb{C}$, $e^{i\theta} = \cos \theta + i \sin \theta$ et $e^{z+w} = e^z e^w$.
- Équation différentielle : coefficients indéterminés, récurrence, rayon, reconnaissance de la somme.

Le livre de cours de maths Maths Spé

Tout le programme en un seul PDF de 103 pages, à imprimer ou à garder sur ta tablette.

[Voir le livre](#)

Zyro te conseille la suite

Exercices de maths

Séries entières : exercices de maths
Maths Spé

Contrôles de maths

Séries entières : contrôle de maths
Maths Spé

QCM de maths

Séries entières : QCM de maths Maths
Spé

Exercices de maths

Intégration sur un intervalle quelconque :
exercices de maths Maths Spé

 Exercices de maths

Topologie des espaces vectoriels normés
: exercices de maths Maths Spé

 Contrôles de maths

Intégration sur un intervalle quelconque :
contrôle de maths Maths Spé

Zyro vous emmène sur nos sites partenaires

Embarquez pour d'autres planètes du savoir et leurs applis.

Décollage