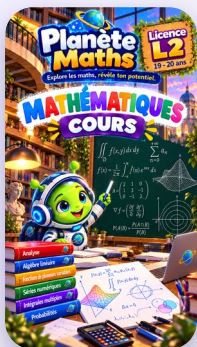


Séries entières : cours de maths Licence L2 à télécharger en PDF



Le livre de cours de maths Licence L2

Tout le programme en un seul PDF de 100 pages, à imprimer ou à garder sur ta tablette.

[Voir le livre](#)

Une série entière est une « fonction polynomiale de degré infini » $\sum a_n x^n$. Son étude repose sur une seule question : pour quelles valeurs de la variable la somme a-t-elle un sens ? La réponse est un disque, dont le rayon commande toute la théorie : dérivation, intégration, développements des fonctions usuelles et résolution d'équations différentielles.

1. Séries entières et fonction somme

D

Série entière

Soit $(a_n)_{n \geq 0}$ une suite de nombres complexes. On appelle **série entière** de coefficients a_n la série de fonctions $\sum_{n \geq 0} a_n z^n$ de la variable $z \in \mathbb{C}$ (ou $x \in \mathbb{R}$). Pour chaque z où elle converge, on note $S(z) = \sum_{n=0}^{+\infty} a_n z^n$ sa somme.

Trois exemples guident la suite : $\sum z^n$ (série géométrique), $\sum \frac{z^n}{n!}$ (exponentielle) et $\sum n! z^n$, qui ne converge qu'en $z = 0$.

2. Lemme d'Abel et rayon de convergence

P Lemme d'Abel

Si la suite $(a_n r_0^n)$ est bornée pour un réel $r_0 > 0$, alors pour tout z tel que $|z| < r_0$, la série $\sum a_n z^n$ converge absolument.

Preuve. Soit M un majorant de $|a_n| r_0^n$ et $q = |z|/r_0 < 1$. Alors $|a_n z^n| = |a_n| r_0^n q^n \leq M q^n$, terme général d'une série géométrique convergente.

D Rayon de convergence

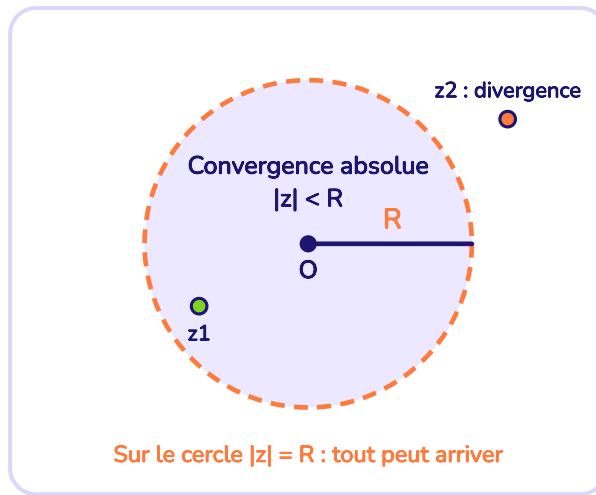
Le rayon de convergence est $R = \sup\{r \geq 0 : (a_n r^n) \text{ est bornée}\} \in [0, +\infty]$.

P Théorème

Si $|z| < R$, la série $\sum a_n z^n$ converge absolument. Si $|z| > R$, elle diverge grossièrement (son terme général n'est pas borné).

3. Disque de convergence et comportement au bord

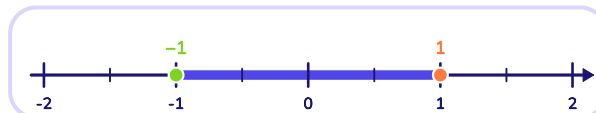
L'ensemble $\{|z| < R\}$ est le **disque ouvert de convergence** ; sur $\mathbb{R}$, c'est l'intervalle $] -R, R[$. Sur le cercle $|z| = R$, le théorème ne dit rien et chaque cas se traite à part.



E

Exemple 1 : trois séries, même rayon, trois bords

Les séries $\sum z^n$, $\sum \frac{z^n}{n}$ et $\sum \frac{z^n}{n^2}$ ont toutes pour rayon $R = 1$. Au bord $|z| = 1$: la première diverge partout (le terme général ne tend pas vers 0) ; la deuxième diverge en $z = 1$ (série harmonique) mais converge en $z = -1$ (série alternée) ; la troisième converge en tout point du cercle (convergence absolue, $\sum 1/n^2 < \infty$). Pour la deuxième, le domaine réel de convergence est $[-1, 1[$.



⚠

Erreur classique

Le rayon ne donne que l'intérieur du disque. Conclure « elle converge en $x = R$ » ou « elle diverge en $x = R$ » sans étude directe du bord est faux.

4. Calculer un rayon de convergence

M

Méthodes

1. **Règle de d'Alembert.** Si $\left| \frac{a_{n+1}}{a_n} \right| \rightarrow \ell \in [0, +\infty]$, alors $R = 1/\ell$ (avec $1/0 = +\infty$ et $1/+\infty = 0$).
2. **Cauchy-Hadamard.** Si $|a_n|^{1/n} \rightarrow \ell$, alors $R = 1/\ell$.
3. **Comparaison.** Si $a_n = O(b_n)$, alors $R_a \geq R_b$; si $a_n \sim b_n$, alors $R_a = R_b$.
4. **Séries lacunaires** (puissances $x^{2n}, x^{3n+1} \dots$) : appliquer d'Alembert aux modules $|u_n(x)|$ de la série elle-même, pas aux coefficients.

E

Exemple 2 : un rayon par d'Alembert

Pour $u_n(x) = \frac{x^{2n}}{n 5^n}$ ($n \geq 1$) : $\left| \frac{u_{n+1}}{u_n} \right| = \frac{|x|^2}{5} \cdot \frac{n}{n+1} \rightarrow \frac{|x|^2}{5}$. La série converge si $|x|^2 < 5$, diverge si $|x|^2 > 5$: $R = \sqrt{5}$.

!

Zyro

« Sur ma planète, on dit qu'une série entière est une bulle : à l'intérieur tout est calme, à l'extérieur ça explose, et sur la paroi il faut aller regarder de près. »

5. Opérations sur les séries entières

P

Somme et produit de Cauchy

Soient $\sum a_n z^n$ et $\sum b_n z^n$ de rayons R_a et R_b . Pour $|z| < \min(R_a, R_b)$:

- la somme $\sum (a_n + b_n) z^n$ a un rayon $R \geq \min(R_a, R_b)$, avec égalité si $R_a \neq R_b$;
- le produit de Cauchy $\sum c_n z^n$, avec $c_n = \sum_{k=0}^n a_k b_{n-k}$, a un rayon $\geq \min(R_a, R_b)$ et sa somme vaut $(\sum a_n z^n) (\sum b_n z^n)$.

Multiplier par une constante non nulle ou par z^p ne change pas le rayon. Remplacer z par λz ($\lambda \neq 0$) le divise par $|\lambda|$.

6. Dérivation et intégration

P

Théorème de dérivation terme à terme

Si $f(x) = \sum a_n x^n$ sur $] -R, R[$ avec $R > 0$, alors f est de classe $\mathcal{C}^\infty$ sur $] -R, R[$, et

$$f'(x) = \sum_{n=1}^{+\infty} n a_n x^{n-1}, \quad \int_0^x f(t) dt = \sum_{n=0}^{+\infty} \frac{a_n}{n+1} x^{n+1}.$$

Les séries dérivée et primitive ont le même rayon R . De plus $a_n = \frac{f^{(n)}(0)}{n!}$: les coefficients sont uniques.

E**Exemple 3 : deux sommes par dérivation**

Pour $|x| < 1$, $\sum_{n \geq 0} x^n = \frac{1}{1-x}$. On dérive : $\sum_{n \geq 1} nx^{n-1} = \frac{1}{(1-x)^2}$. On intègre $\frac{1}{1+t}$: $\ln(1+x) = \sum_{n \geq 1} (-1)^{n-1} \frac{x^n}{n}$. Avec $x = \frac{1}{2}$, $\sum_{n \geq 1} n 2^{-(n-1)} = 4$.

7. Développement en série entière et séries usuelles**D****Développable en série entière**

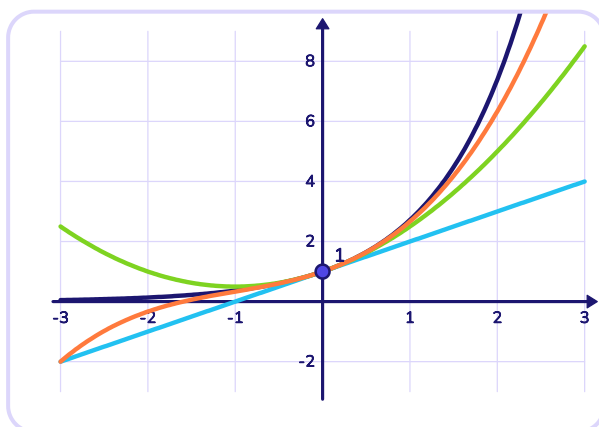
Une fonction f est **développable en série entière en 0** s'il existe $r > 0$ et une série entière de somme f sur $] -r, r[$. Alors cette série est la série de Taylor $\sum \frac{f^{(n)}(0)}{n!} x^n$.

**Réciproque fausse**

Une fonction $\mathcal{C}^\infty$ n'est pas toujours développable : $f(x) = e^{-1/x^2}$ (prolongée par $f(0) = 0$) a toutes ses dérivées nulles en 0, sa série de Taylor est nulle, mais f ne l'est pas.

Pour développer, on ramène la fonction aux séries du tableau (changement de variable, produit, fractions partielles, dérivation ou intégration).

Fonction	Développement en 0	Rayon
e^x	$\sum_{n \geq 0} \frac{x^n}{n!}$	$+\infty$
$\cos x$	$\sum_{n \geq 0} (-1)^n \frac{x^{2n}}{(2n)!}$	$+\infty$
$\sin x$	$\sum_{n \geq 0} (-1)^n \frac{x^{2n+1}}{(2n+1)!}$	$+\infty$
$\operatorname{ch} x, \operatorname{sh} x$	$\sum \frac{x^{2n}}{(2n)!}, \sum \frac{x^{2n+1}}{(2n+1)!}$	$+\infty$
$\frac{1}{1-x}$	$\sum_{n \geq 0} x^n$	1
$\ln(1+x)$	$\sum_{n \geq 1} (-1)^{n-1} \frac{x^n}{n}$	1
$\arctan x$	$\sum_{n \geq 0} (-1)^n \frac{x^{2n+1}}{2n+1}$	1
$(1+x)^\alpha$	$\sum_{n \geq 0} \frac{\alpha(\alpha-1)\cdots(\alpha-n+1)}{n!} x^n$	1 si $\alpha \notin \mathbb{N}$



E**Exemple 4 : développer $x e^{x^2}$**

Avec $e^u = \sum u^n/n!$ et $u = x^2$: $x e^{x^2} = \sum_{n \geq 0} \frac{x^{2n+1}}{n!}$, pour tout réel x . Le rayon est $+\infty$.

8. Équations différentielles par séries entières

M

Méthode

1. Chercher $y = \sum a_n x^n$ et calculer y' , y'' terme à terme.
2. Reporter dans l'équation, regrouper les puissances de x et décaler les indices pour que chaque somme soit en x^n .
3. Identifier les coefficients de x^n : relation de récurrence sur les a_n , avec les conditions initiales.
4. Résoudre la récurrence, puis déterminer le rayon et reconnaître la somme si possible.

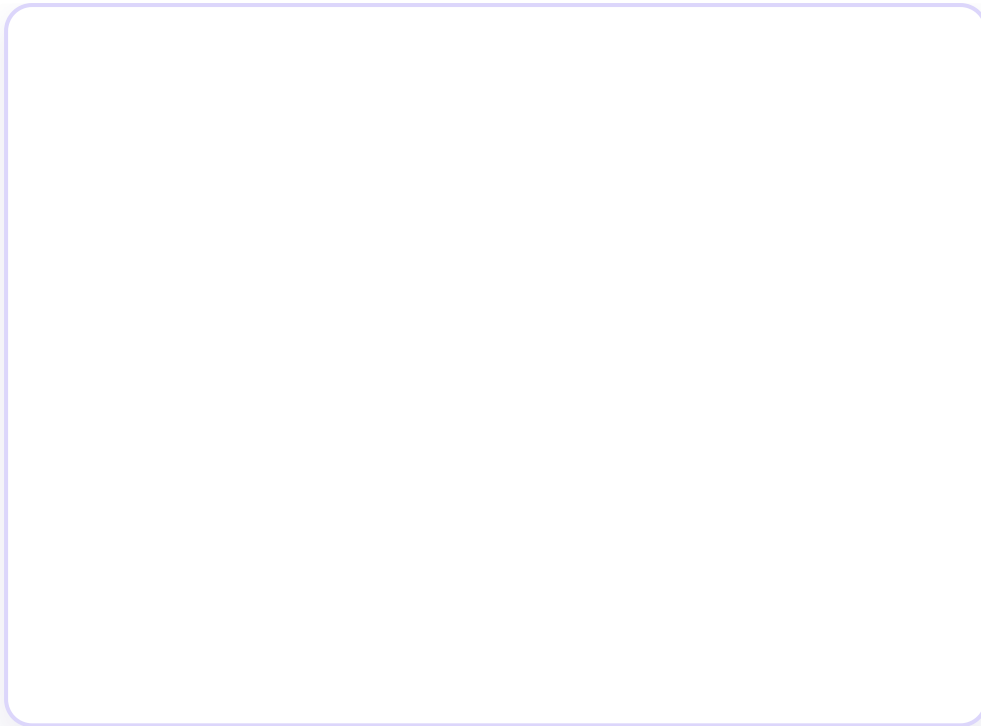
E**Exemple 5 : $(1 - x)y' = 2y$, $y(0) = 1$**

Le coefficient de x^n dans $(1 - x)y'$ est $(n + 1)a_{n+1} - n a_n$. L'équation donne

$(n + 1)a_{n+1} = (n + 2)a_n$, donc $a_{n+1} = \frac{n + 2}{n + 1} a_n$ et, avec $a_0 = 1$, $a_n = n + 1$.

Ainsi $y = \sum (n + 1)x^n = \frac{1}{(1 - x)^2}$, de rayon 1. On vérifie : $y' = \frac{2}{(1 - x)^3}$ et

$$(1 - x)y' = \frac{2}{(1 - x)^2} = 2y.$$



Séries entières Licence L2 : sommes partielles de la série de $\ln(1+x)$ jusqu'à $n = 3, 6$ et 9 , qui épousent la courbe sur $] -1 ; 1[$ et s'en écartent au-delà du rayon 1

À retenir

- Le rayon R sépare convergence absolue ($|z| < R$) et divergence ($|z| > R$) ; le bord se traite à part.
- Pour calculer R : d'Alembert, Cauchy–Hadamard, comparaison ; pour les séries lacunaires, d'Alembert sur les modules.
- Somme et produit de Cauchy : rayon $\geq \min(R_a, R_b)$.
- Dérivation et intégration terme à terme conservent le rayon ; $a_n = f^{(n)}(0)/n!$.
- Savoir par cœur les développements de e^x , $\cos$, $\sin$, ch , sh , $\frac{1}{1-x}$, $\ln(1+x)$, $\arctan$, $(1+x)^\alpha$.
- Équation différentielle : poser $y = \sum a_n x^n$, obtenir une récurrence sur a_n .

Le livre de cours de maths Licence L2

Tout le programme en un seul PDF de 100 pages, à imprimer ou à garder sur ta tablette.

Voir le livre



Entraîne-toi : défi express de Licence L2

Changer de niveau

Niveau : Licence L2

6 questions au hasard, correction tout de suite.



Lancer le défi



Zyro te conseille la suite



Exercices de maths

Séries entières : exercices de maths
Licence L2



Contrôles de maths

Séries entières : contrôle de maths
Licence L2

 QCM de maths

Séries entières : QCM de maths Licence L2

 Exercices de maths

Topologie des espaces métriques et normés : exercices de maths Licence L2

 Exercices de maths

Calcul différentiel à plusieurs variables : exercices de maths Licence L2

 Contrôles de maths

Topologie des espaces métriques et normés : contrôle de maths Licence L2

Zyro vous emmène sur nos sites partenaires

Embarquez pour d'autres planètes du savoir et leurs applis.

Décollage