

Séries entières : exercices corrigés de maths Maths Spé à télécharger en PDF



Le livre d'exercices corrigés de maths Maths Spé

Tout le programme en un seul PDF de 133 pages, à imprimer ou à garder sur ta tablette.

[Voir le livre](#)

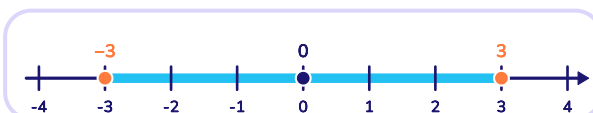
Corrigés rédigés des exercices du chapitre. Vérifie chaque étape, puis corrige-toi.

1 Une série géométrique en $x/3$



On a $a_n = 3^{-n}$ et $\left| \frac{a_{n+1}}{a_n} \right| = \frac{1}{3}$, donc $R = 3$. Plus directement, $\sum (x/3)^n$ est géométrique de raison $x/3$, convergente si et seulement si $|x| < 3$.

Pour $x = 1,5$, la raison vaut $\frac{1}{2}$ et la somme est $\frac{1}{1 - 1/2} = 2$.



2 Rayon 1 et bornes



Avec $a_n = \frac{n+1}{n+4}$, $\frac{a_{n+1}}{a_n} = \frac{(n+2)(n+4)}{(n+5)(n+1)} \rightarrow 1$, donc $R = 1$.

En $x = \pm 1$, $|a_n x^n| = \frac{n+1}{n+4} \rightarrow 1 \neq 0$: le terme général ne tend pas vers 0, la série diverge grossièrement aux deux bornes. Le domaine de convergence est exactement $] -1 ; 1[$.

3 Série de l'exponentielle



$\left| \frac{a_{n+1}}{a_n} \right| = \frac{n!}{(n+1)!} = \frac{1}{n+1} \rightarrow 0$, donc $R = +\infty$.

En $x = 1$: $1 + 1 + \frac{1}{2} + \frac{1}{6} + \frac{1}{24} = \frac{65}{24} \approx 2,7083$, valeur approchée par défaut de $e \approx 2,71828$.

4 Somme d'une série géométrique



Série géométrique de raison $q = \frac{x}{2}$ avec $|q| < 1$: $S(x) = \frac{1}{1 - x/2} = \frac{2}{2 - x}$.

$S(1) = \frac{2}{1} = 2$ et $S(-1) = \frac{2}{3}$.

5 Vrai ou faux



a. **Vrai.** Si $\sum a_n$ converge, $(a_n \cdot 1^n)$ tend vers 0, donc est bornée ; le lemme d'Abel donne $R \geq 1$.

b. **Faux.** Avec $a_n = \frac{1}{n2^n}$ ($n \geq 1$), le rayon vaut 2 (d'Alembert : quotient $\rightarrow \frac{1}{2}$), mais $\sum a_n 2^n = \sum \frac{1}{n}$ diverge.

c. **Vrai.** $\left| \frac{(n+1)!}{n!} \right| = n+1 \rightarrow +\infty$, donc $R = \frac{1}{+\infty} = 0$.

6 Développer $1/(1+x^2)$



En posant $t = -x^2$ dans $\frac{1}{1-t} = \sum t^n$ (valable si $|t| < 1$), on obtient

$$\frac{1}{1+x^2} = \sum_{n \geq 0} (-1)^n x^{2n}, \text{ de rayon } R = 1.$$

En $x = \frac{1}{2}$, la somme vaut $\frac{1}{1+1/4} = \frac{4}{5} = 0,8$. Les quatre premiers termes donnent

$$1 - \frac{1}{4} + \frac{1}{16} - \frac{1}{64} = \frac{51}{64} \approx 0,7969.$$

7 Dériver une série géométrique



Pour $|x| < 1$: $\sum_{n \geq 1} nx^{n-1} = \frac{1}{(1-x)^2}$. En multipliant par x : $\sum_{n \geq 1} nx^n = \frac{x}{(1-x)^2}$.

Pour $x = \frac{1}{2}$: $\sum_{n \geq 1} \frac{n}{2^n} = \frac{1/2}{(1/2)^2} = 2$.

8 Coefficients binomiaux centraux



Avec $a_n = \binom{2n}{n} = \frac{(2n)!}{(n!)^2}$:

$$\frac{a_{n+1}}{a_n} = \frac{(2n+2)(2n+1)}{(n+1)^2} = \frac{2(2n+1)}{n+1} \xrightarrow{n \rightarrow \infty} 4.$$

D'après d'Alembert, $R = \frac{1}{4}$.

9 Une série lacunaire et sa somme



a. On pose $u = x^2/4$. La série $\sum \frac{u^n}{n+1}$ a pour rayon 1 en u (quotient $\frac{n+1}{n+2} \rightarrow 1$). La série converge si $\frac{x^2}{4} < 1$, c'est-à-dire $|x| < 2$: $R = 2$.

b. Pour $|u| < 1$, $u \neq 0$: $\sum_{n \geq 0} \frac{u^n}{n+1} = \frac{1}{u} \sum_{n \geq 0} \frac{u^{n+1}}{n+1} = -\frac{\ln(1-u)}{u}$. Donc

$$f(x) = -\frac{4}{x^2} \ln \left(1 - \frac{x^2}{4} \right).$$

Pour $x = 1$: $f(1) = -4 \ln \frac{3}{4} = 4 \ln \frac{4}{3} \approx 1,1507$.

10 Fractions rationnelles



Décomposition. $\frac{1}{(1-x)(1-2x)} = \frac{2}{1-2x} - \frac{1}{1-x}$ (on vérifie :

$2(1-x) - (1-2x) = 1$). Donc $c_n = 2 \cdot 2^n - 1 = 2^{n+1} - 1$, pour $|x| < \frac{1}{2}$.

Produit de Cauchy. Avec $a_k = 1$, $b_k = 2^k$: $c_n = \sum_{k=0}^n 2^k = 2^{n+1} - 1$. On retrouve le même résultat, par exemple $c_3 = 15$.

Le rayon vaut $R = \frac{1}{2}$ (pôle le plus proche de 0 : $x = \frac{1}{2}$).

11 Somme par produit de Cauchy



Le produit de Cauchy de $\sum x^n$ par elle-même a pour coefficient $c_n = \sum_{k=0}^n 1 \cdot 1 = n+1$,

et $\left(\frac{1}{1-x} \right)^2 = \frac{1}{(1-x)^2}$.

Pour $x = \frac{1}{3}$: $\sum \frac{n+1}{3^n} = \frac{1}{(2/3)^2} = \frac{9}{4}$.

Comme $\sum_{n \geq 0} \frac{1}{3^n} = \frac{3}{2}$, on obtient $\sum_{n \geq 1} \frac{n}{3^n} = \sum \frac{n+1}{3^n} - \sum \frac{1}{3^n} = \frac{9}{4} - \frac{3}{2} = \frac{3}{4}$.

12 Valeur approchée de $\ln(3/2)$



Par intégration de $\sum (-1)^n t^n : \ln(1+x) = \sum_{n \geq 1} (-1)^{n-1} \frac{x^n}{n}, |x| < 1$. Pour $x = \frac{1}{2}$:

$$\frac{1}{2} - \frac{1}{8} + \frac{1}{24} - \frac{1}{64} + \frac{1}{160} \approx 0,4073.$$

La série est alternée, à termes décroissants en valeur absolue vers 0 : l'erreur est majorée par le terme suivant, $\frac{1}{6 \cdot 2^6} = \frac{1}{384} \approx 0,0026$. (Valeur exacte : $\ln 1,5 \approx 0,4055$.)

13 Somme de $n^2 x^n$



On dérive : $\sum_{n \geq 1} n^2 x^{n-1} = \left(\frac{x}{(1-x)^2} \right)' = \frac{(1-x)^2 + 2x(1-x)}{(1-x)^4} = \frac{1+x}{(1-x)^3}$.

On multiplie par x : $\sum_{n \geq 1} n^2 x^n = \frac{x(1+x)}{(1-x)^3}$.

Pour $x = \frac{1}{3}$: $\frac{\frac{1}{3} \cdot \frac{4}{3}}{\frac{8}{27}} = \frac{4}{9} \cdot \frac{27}{8} = \frac{3}{2}$.

14 Sommes liées à ch 1 et sh 1



En $x = 1$, les développements de **ch** et **sh** donnent :

$$\sum \frac{1}{(2n)!} = \text{ch } 1 = \frac{e + e^{-1}}{2} \approx 1,5431, \quad \sum \frac{1}{(2n+1)!} = \text{sh } 1 = \frac{e - e^{-1}}{2} \approx 1,175$$

Vérification : la somme vaut e (somme de tous les $\frac{1}{n!}$) et $1,5431 + 1,1752 \approx 2,7183$.

15 Équation $y'' - 4y = 0$

★★★

Avec $y = \sum a_n x^n$: $y'' = \sum (n+2)(n+1)a_{n+2}x^n$. L'équation donne $(n+2)(n+1)a_{n+2} = 4a_n$. Les conditions initiales fournissent $a_0 = 0$, $a_1 = 2$. Donc tous les coefficients pairs sont nuls, et $a_{2p+3} = \frac{4a_{2p+1}}{(2p+3)(2p+2)}$, d'où $a_{2p+1} = \frac{2 \cdot 4^p}{(2p+1)!}$.

Le rayon est $+\infty$ et $y(x) = \sum_{p \geq 0} \frac{(2x)^{2p+1}}{(2p+1)!} = \text{sh}(2x)$.

16 Équation $(1+x)y' = y/2$

★★★

- a. $(1+x) \sum n a_n x^{n-1} = \sum (n+1)a_{n+1}x^n + \sum n a_n x^n = \frac{1}{2} \sum a_n x^n$. Donc $(n+1)a_{n+1} = \left(\frac{1}{2} - n\right)a_n$. Avec $a_0 = 1$: $a_1 = \frac{1}{2}$, $a_2 = -\frac{1}{8}$, $a_3 = \frac{1}{16}$. Le quotient $\left| \frac{a_{n+1}}{a_n} \right| = \frac{|1/2 - n|}{n+1} \rightarrow 1$: $R = 1$.
- b. La fonction $z(x) = \sqrt{1+x}$ vérifie $(1+x)z' = \frac{\sqrt{1+x}}{2} = \frac{z}{2}$ et $z(0) = 1$; par unicité de Cauchy-Lipschitz sur $] -1 ; +\infty[$, $y = \sqrt{1+x}$.
- Pour $x = 0,1$: $1 + 0,05 - 0,00125 + 0,0000625 = 1,0488125$ (valeur exacte $\approx 1,0488088$).

17 Une fonction C^∞ non développable

★★★

Les coefficients de Taylor sont $a_n = \frac{f^{(n)}(0)}{n!} = 0$ pour tout n : la série de Taylor est la série nulle, de rayon $+\infty$ et de somme identiquement nulle.

Or $f(x) = e^{-1/x^2} > 0$ pour tout $x \neq 0$ (par exemple $f(1) = e^{-1} \neq 0$). Aucune série entière ne peut avoir pour somme f sur un voisinage de 0 : ses coefficients seraient forcément ceux de Taylor, c'est-à-dire nuls. Donc f est C^∞ sans être développable en série entière.

18 Exponentielle complexe et équation

★★★★

a. $e^{2+i\pi/3} = e^2 \left(\cos \frac{\pi}{3} + i \sin \frac{\pi}{3} \right) = e^2 \left(\frac{1}{2} + i \frac{\sqrt{3}}{2} \right) = \frac{e^2}{2} + i \frac{\sqrt{3}e^2}{2}.$

b. $1 + i\sqrt{3}$ a pour module 2 et pour argument $\frac{\pi}{3}$: $1 + i\sqrt{3} = 2e^{i\pi/3} = e^{\ln 2 + i\pi/3}$. Donc $z = \ln 2 + \frac{i\pi}{3} + 2ik\pi, k \in \mathbb{Z}.$

c. Avec $z = x + iy$: $e^z = e^x e^{iy}$ et $|e^{iy}| = \sqrt{\cos^2 y + \sin^2 y} = 1$. Donc $|e^z| = e^x.$

19 Rayon de $\sum n!/n^n x^n$

★★★★

$$\frac{a_{n+1}}{a_n} = \frac{(n+1)!}{(n+1)^{n+1}} \cdot \frac{n^n}{n!} = \frac{n^n}{(n+1)^n} = \left(1 + \frac{1}{n}\right)^{-n} \rightarrow e^{-1}. \text{ Donc } R = e \approx 2,718.$$

Comme $3 > e$, la série diverge en $x = 3$ (divergence grossière : $|a_n 3^n| \rightarrow +\infty$).

20 La série de argh

★★★★

a. S' a pour terme x^{2n} : $\sum x^{2n}$ a pour rayon 1, donc S aussi (même rayon que sa dérivée). $R = 1$.

b. $S'(x) = \sum x^{2n} = \frac{1}{1-x^2} = \frac{1}{2} \left(\frac{1}{1+x} + \frac{1}{1-x} \right)$. Comme $S(0) = 0$:

$$S(x) = \frac{1}{2} \ln \frac{1+x}{1-x}.$$

c. $S\left(\frac{1}{2}\right) = \frac{1}{2} \ln \frac{3/2}{1/2} = \frac{1}{2} \ln 3 \approx 0,5493.$

21 Une équation à coefficient variable



On écrit $y'' = \sum (n+2)(n+1)a_{n+2}x^n$, $2xy' = \sum 2na_nx^n$, $2y = \sum 2a_nx^n$.

L'identification donne $(n+2)(n+1)a_{n+2} = (2n+2)a_n$, soit $a_{n+2} = \frac{2a_n}{n+2}$.

Avec $a_0 = 0$, $a_1 = 1$: $a_2 = 0$, $a_3 = \frac{2}{3}$, $a_4 = 0$, $a_5 = \frac{2 \cdot \frac{2}{3}}{5} = \frac{4}{15}$.

Pour n impair, $\frac{a_{n+2}}{a_n} = \frac{2}{n+2} \rightarrow 0$: en posant $t = x^2$, la série en t est de rayon infini, donc $R = +\infty$.

Le livre d'exercices corrigés de maths Maths Spé

Tout le programme en un seul PDF de 133 pages, à imprimer ou à garder sur ta tablette.

[Voir le livre](#)

Zyro te conseille la suite

Exercices de maths

Séries entières : exercices de maths
Maths Spé

QCM de maths

Séries entières : QCM de maths Maths
Spé



Contrôles de maths

Séries entières : contrôle de maths
Maths Spé



Exercices de maths

Intégration sur un intervalle quelconque :
exercices de maths Maths Spé



Exercices de maths

Topologie des espaces vectoriels normés
: exercices de maths Maths Spé



QCM de maths

Intégration sur un intervalle quelconque :
QCM de maths Maths Spé

Zyro vous emmène sur nos sites partenaires

Embarquez pour d'autres planètes du savoir et leurs applis.

Décollage