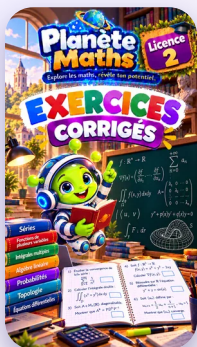


Séries entières : exercices corrigés de maths Licence L2 à télécharger en PDF



Le livre d'exercices corrigés de maths Licence L2

Tout le programme en un seul PDF de 128 pages, à imprimer ou à garder sur ta tablette.

[Voir le livre](#)

Corrigés rédigés des exercices du chapitre. Vérifie chaque étape, puis corrige-toi.

1 Un premier rayon



Posons $a_n = \frac{2^n}{n+1}$. Alors $\left| \frac{a_{n+1}}{a_n} \right| = 2 \cdot \frac{n+1}{n+2} \rightarrow 2$.

Par la règle de d'Alembert, $R = \frac{1}{2}$.

2 Un polynôme au numérateur



$\frac{a_{n+1}}{a_n} = \frac{n+2}{n+1} \cdot \frac{1}{4} \rightarrow \frac{1}{4}$. Donc $R = 4$.

3 Exponentielle déguisée



1) $\left| \frac{a_{n+1}}{a_n} \right| = \frac{3}{n+1} \rightarrow 0$, donc $R = +\infty$.

2) $\sum \frac{(3x)^n}{n!} = e^{3x}$. En $x = \frac{1}{3}$, la somme vaut $e^1 = e$.

4 Rayon nul



a) Pour $x \neq 0$, $\left| \frac{(n+1)!x^{n+1}}{n!x^n} \right| = (n+1)|x| \rightarrow +\infty$: la série diverge. Donc $R = 0$.

b) Pour $x \neq 0$, $|n^n x^n| = (n|x|)^n \rightarrow +\infty$ dès que $n|x| > 1$: divergence grossière. Donc $R = 0$.

5 Vrai ou faux ?



a. Vrai : $|-2,5| < 3$, il y a convergence absolue dans le disque ouvert.

b. Vrai : $3,5 > 3$, la série diverge grossièrement.

c. Indéterminé : $x = 3$ est au bord, on ne peut rien conclure sans étude ($\sum x^n/n$ et $\sum x^n/n^2$ à rayon 1 se comportent différemment en 1).

d. Vrai : si $\sum a_n 2^n$ converge, son terme général tend vers 0, donc $(a_n 2^n)$ est bornée et $R \geq 2$ par définition du rayon.

6 Une somme géométrique alternée



C'est la série géométrique de raison $q = -\frac{x}{3}$, qui converge ssi $|x| < 3$, de somme

$$\frac{1}{1 + x/3} = \frac{3}{3 + x}.$$

En $x = 1$: $\frac{3}{4}$.

7 Développer l'exponentielle de $2x$



1) $e^{2x} = \sum_{n \geq 0} \frac{2^n}{n!} x^n$, pour tout réel x .

2) En $x = 1$: $\sum \frac{2^n}{n!} = e^2 \approx 7,389$. En $x = -1$: $\sum \frac{(-2)^n}{n!} = e^{-2} \approx 0,135$.

8 Une série lacunaire



Posons $u_n = \frac{(n^2 + 1)x^{2n}}{3^n}$. $\left| \frac{u_{n+1}}{u_n} \right| = \frac{(n+1)^2 + 1}{n^2 + 1} \cdot \frac{|x|^2}{3} \rightarrow \frac{|x|^2}{3}$. Convergence si $|x| < \sqrt{3}$, divergence si $|x| > \sqrt{3}$: $R = \sqrt{3}$.

En $x = \sqrt{3}$: $u_n = n^2 + 1 \rightarrow +\infty$, divergence grossière. Le domaine est $] -\sqrt{3}, \sqrt{3}[$.

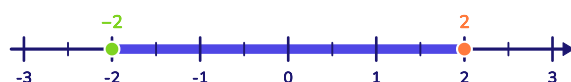
9 Étude du bord



$\left| \frac{a_{n+1}}{a_n} \right| = \frac{n}{2(n+1)} \rightarrow \frac{1}{2}$, donc $R = 2$.

En $x = 2$: $\sum \frac{1}{n}$ diverge (série harmonique). En $x = -2$: $\sum \frac{(-1)^n}{n}$ converge (série alternée, critère de Leibniz).

Le domaine est $[-2, 2[$, représenté ci-dessous.



10 Produit de Cauchy



1) $c_n = \sum_{k=0}^n 1 \cdot 1 = n + 1$. Pour $|x| < 1$: $\sum (n+1)x^n = \left(\frac{1}{1-x} \right)^2 = \frac{1}{(1-x)^2}$.

2) En $x = \frac{1}{2}$: $\sum \frac{n+1}{2^n} = \frac{1}{(1/2)^2} = 4$. Or $\sum \frac{1}{2^n} = 2$, donc $\sum \frac{n}{2^n} = 4 - 2 = 2$.

11 Durée d'une partie de dés



Pour $|x| < 1$, $\sum_{n \geq 1} nx^{n-1} = \frac{1}{(1-x)^2}$ (dérivation terme à terme).

En $x = \frac{5}{6}$: $\sum nx^{n-1} = \frac{1}{(1/6)^2} = 36$. Donc $E(X) = \frac{1}{6} \times 36 = 6$.

En moyenne, il faut 6 lancers pour obtenir un six.

12 Un logarithme par intégration



1) Pour $|t| < 1$, $\frac{1}{1-t} = \sum t^n$. On intègre de 0 à x :

$$-\ln(1-x) = \sum \frac{x^{n+1}}{n+1} = \sum_{n \geq 1} \frac{x^n}{n}.$$

2) En $x = \frac{1}{2}$: $\sum \frac{1}{n2^n} = -\ln \frac{1}{2} = \ln 2 \approx 0,693$. En $x = \frac{1}{3}$:

$$\sum \frac{1}{n3^n} = -\ln \frac{2}{3} = \ln \frac{3}{2} \approx 0,405.$$

13 Fractions partielles



On cherche $\frac{1}{(1-x)(1-2x)} = \frac{A}{1-x} + \frac{B}{1-2x}$: $1 = A(1-2x) + B(1-x)$. En

$x = 1$: $A = -1$; en $x = \frac{1}{2}$: $B = 2$.

Donc $f(x) = \sum (2 \cdot 2^n - 1)x^n = \sum (2^{n+1} - 1)x^n$. Contrôle : $c_0 = 1$, $c_1 = 3$ (par le produit de Cauchy $1 \cdot 2 + 1 \cdot 1$).

Rayon : $\min(1, \frac{1}{2}) = \frac{1}{2}$.

14 Équation avec second membre



Posons $y = \sum a_n x^n$, $a_0 = 0$. Le coefficient constant donne $a_1 = 2a_0 + 1 = 1$. Pour $n \geq 1$: $(n+1)a_{n+1} = 2a_n$.

Donc $a_n = \frac{2^{n-1}}{n!}$ pour $n \geq 1$ (vérifié : $a_2 = 1$, $a_3 = \frac{2}{3}$).

$$y = \sum_{n \geq 1} \frac{2^{n-1} x^n}{n!} = \frac{e^{2x} - 1}{2}, \text{ de rayon infini.}$$

15 Calculer un sinus à la main



$$\sin x \approx x - \frac{x^3}{6} + \frac{x^5}{120}. \text{ Pour } x = 0,2 : 0,2 - \frac{0,008}{6} + \frac{0,00032}{120} \approx 0,198669333.$$

La série est alternée avec termes décroissants en valeur absolue : l'erreur est majorée par le terme suivant, $\frac{0,2^7}{5040} \approx 2,5 \times 10^{-9}$.

Donc $\sin(0,2) \approx 0,19866933$.

16 Coefficients binomiaux centraux



$$1) \frac{a_{n+1}}{a_n} = \frac{(2n+2)(2n+1)}{(n+1)^2} = \frac{2(2n+1)}{n+1} \rightarrow 4, \text{ donc } R = \frac{1}{4}.$$

2) En $x = \frac{1}{4}$: le terme est $u_n \geq \frac{1}{2n+1}$, terme d'une série divergente : divergence (la somme des $2n+1$ coefficients du binôme vaut 4^n , donc le plus grand, $\binom{2n}{n}$, est au moins $4^n/(2n+1)$).

En $x = -\frac{1}{4}$: série alternée $\sum (-1)^n u_n$. La suite (u_n) décroît car $\frac{u_{n+1}}{u_n} = \frac{2n+1}{2n+2} < 1$. Et

$$u_n^2 = \prod \left(\frac{2k-1}{2k} \right)^2 \leq \prod \frac{2k-1}{2k} \cdot \frac{2k}{2k+1} = \frac{1}{2n+1} \rightarrow 0 \text{ car } \frac{2k-1}{2k} \leq \frac{2k}{2k+1}.$$

Leibniz : convergence.

Domaine : $[-\frac{1}{4}, \frac{1}{4}[$.

17 Cauchy-Hadamard

★★★★

$$|a_n|^{1/n} = \left(1 + \frac{1}{n}\right)^n \rightarrow e. \text{ Par Cauchy-Hadamard, } R = \frac{1}{e}.$$

(La règle de d'Alembert serait ici pénible : le rapport a_{n+1}/a_n mêle des exposants $(n+1)^2$ et n^2 .)

18 Série de l'arctangente

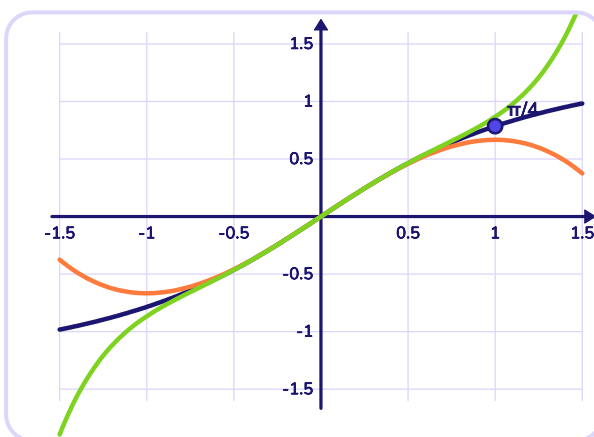
★★★★

1) $\arctan'(t) = \frac{1}{1+t^2} = \sum (-1)^n t^{2n}$ pour $|t| < 1$. On intègre :

$$\arctan x = \sum_{n \geq 0} \frac{(-1)^n x^{2n+1}}{2n+1}, \text{ rayon } 1.$$

2) Pour $x = \frac{1}{\sqrt{3}}$: $x^{2n+1} = \frac{1}{\sqrt{3} 3^n}$, donc $\arctan \frac{1}{\sqrt{3}} = \frac{\pi}{6} = \frac{1}{\sqrt{3}} \sum \frac{(-1)^n}{3^n(2n+1)}$.

$$\text{Ainsi } \sum \frac{(-1)^n}{3^n(2n+1)} = \frac{\pi\sqrt{3}}{6} \approx 0,9069.$$



19 Développer $\cos^2$

★★★★

$$\cos^2 x = \frac{1 + \cos 2x}{2} = \frac{1}{2} + \frac{1}{2} \sum_{n \geq 0} \frac{(-1)^n (2x)^{2n}}{(2n)!}. \text{ Le terme } n = 0 \text{ donne } \frac{1}{2} :$$

$$\cos^2 x = 1 + \sum_{n \geq 1} \frac{(-1)^n 2^{2n-1}}{(2n)!} x^{2n}, \text{ pour tout réel } x (R = +\infty).$$

Pour x^6 ($n = 3$) : $\frac{-2^5}{720} = -\frac{2}{45}$. Contrôle : $n = 1$ donne $-x^2$, cohérent avec $\cos^2 x \approx 1 - x^2$.

20 Un sinus hyperbolique par récurrence

★★★★

Avec $y = \sum a_n x^n$: $(n+2)(n+1)a_{n+2} = 4a_n$. Conditions : $a_0 = 0$, $a_1 = 2$.

Les indices pairs sont nuls ($a_0 = 0$). Pour les impairs : $a_3 = \frac{4 \cdot 2}{6} = \frac{4}{3}$, $a_5 = \frac{4a_3}{20} = \frac{4}{15}$,

et en général $a_{2n+1} = \frac{2^{2n+1}}{(2n+1)!}$.

Donc $y = \sum \frac{(2x)^{2n+1}}{(2n+1)!} = \text{sh}(2x)$, $R = +\infty$.

21 Une équation à solution non élémentaire

★★★★

Avec $y = \sum a_n x^n$, $a_0 = 0$: le coefficient constant donne $a_1 = 1$. Pour $n \geq 1$:

$(n+1)a_{n+1} = a_{n-1}$.

$a_2 = \frac{a_0}{2} = 0$, $a_3 = \frac{a_1}{3} = \frac{1}{3}$, $a_5 = \frac{a_3}{5} = \frac{1}{15}$, $a_7 = \frac{a_5}{7} = \frac{1}{105}$. Les indices pairs sont nuls.

$y = x + \frac{x^3}{3} + \frac{x^5}{15} + \frac{x^7}{105} + \dots$, avec $a_{2k+1} = \frac{2^k k!}{(2k+1)!}$. Le rapport

$a_{2k+3}/a_{2k+1} = \frac{1}{2k+3} \rightarrow 0$ donne $R = +\infty$.

22 Rayon et substitution

★★★★

1) Posons $X = x^2$. Si $|x| < \sqrt{R}$, alors $|X| < R$ et $\sum a_n X^n$ converge absolument. Si $|x| > \sqrt{R}$, alors $|X| > R$ et $(a_n X^n)$ n'est pas bornée : divergence. Donc le rayon est $\sqrt{R}$.

2) Pour $a_n = \binom{2n}{n}$, $R = \frac{1}{4}$ (exercice sur les coefficients binomiaux centraux), donc le rayon est $\sqrt{1/4} = \frac{1}{2}$.

Le livre d'exercices corrigés de maths Licence L2

Tout le programme en un seul PDF de 128 pages, à imprimer ou à garder sur ta tablette.

Voir le livre



Entraîne-toi : défi express de Licence L2

Changer de niveau

Niveau : Licence L2

6 questions au hasard, correction tout de suite.



Lancer le défi



Zyro te conseille la suite



Exercices de maths

Séries entières : exercices de maths
Licence L2



QCM de maths

Séries entières : QCM de maths Licence
L2



Contrôles de maths

Séries entières : contrôle de maths
Licence L2



Exercices de maths

Topologie des espaces métriques et
normés : exercices de maths Licence L2



Exercices de maths

Calcul différentiel à plusieurs variables :
exercices de maths Licence L2



QCM de maths

Topologie des espaces métriques et
normés : QCM de maths Licence L2

Zyro vous emmène sur nos sites partenaires

Embarquez pour d'autres planètes du savoir et leurs applis.

Décollage