

Singularités et théorème des résidus : cours de maths Licence L3 à télécharger en PDF



Le livre de cours de maths Licence L3

Tout le programme en un seul PDF de 101 pages, à imprimer ou à garder sur ta tablette.

[Voir le livre](#)

En analyse complexe, une fonction holomorphe est rigide : elle est entièrement déterminée par ses valeurs sur un petit cercle. Que se passe-t-il quand cette rigidité est brisée en un point isolé, par exemple en 0 pour $1/z$ ou pour $e^{1/z}$? Ce chapitre classe ces **singularités** grâce aux séries de Laurent, définit le **résidu**, puis démontre le **théorème des résidus**, outil de calcul redoutable qui permet d'évaluer des intégrales réelles que les primitives ne savent pas atteindre.

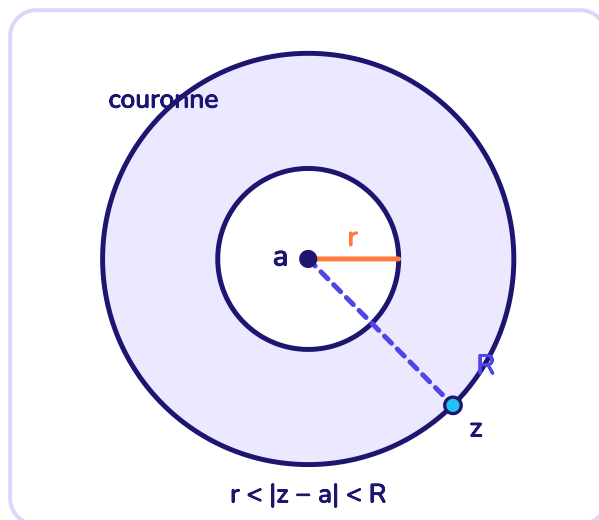
1. Séries de Laurent

Une série entière ne contient que des puissances positives. Pour décrire une fonction holomorphe près d'un point où elle n'est pas définie, il faut aussi des puissances négatives.

D

Couronne

Pour $a \in \mathbb{C}$ et $0 \leq r < R \leq +\infty$, la couronne de centre a est l'ouvert $C(a; r, R) = \{z \in \mathbb{C} : r < |z - a| < R\}$. Pour $r = 0$, c'est un disque épointé.



P

Théorème de Laurent

Soit f holomorphe sur la couronne $C(a; r, R)$. Il existe une unique suite $(a_n)_{n \in \mathbb{Z}}$ telle que

$$f(z) = \sum_{n=-\infty}^{+\infty} a_n (z - a)^n \quad \text{pour tout } z \in C(a; r, R),$$

la convergence étant normale sur tout compact de la couronne. De plus, pour tout $\rho \in]r, R[$,

$$a_n = \frac{1}{2\pi i} \oint_{|w-a|=\rho} \frac{f(w)}{(w-a)^{n+1}} dw.$$

La série $\sum_{n \geq 0} a_n (z - a)^n$ est la **partie régulière** ; la série $\sum_{n < 0} a_n (z - a)^n$ est la **partie principale**. L'unicité signifie que tout développement obtenu « par n'importe quel moyen » (séries

géométriques, produits de développements) est le bon, pourvu qu'il converge sur la couronne considérée. Attention : **le développement dépend de la couronne.**

E Exemple 1 : deux développements de la même fonction

Soit $f(z) = \frac{1}{(z-1)(z-4)} = \frac{1}{3} \left(\frac{1}{z-4} - \frac{1}{z-1} \right)$. Sur la couronne $1 < |z| < 4$, on écrit $\frac{1}{z-1} = \frac{1}{z} \cdot \frac{1}{1-1/z} = \sum_{n \geq 0} z^{-n-1}$ (car $|1/z| < 1$) et $\frac{1}{z-4} = -\frac{1}{4} \cdot \frac{1}{1-z/4} = -\sum_{n \geq 0} \frac{z^n}{4^{n+1}}$ (car $|z/4| < 1$). Donc

$$f(z) = -\frac{1}{3} \sum_{n \geq 0} \frac{z^n}{4^{n+1}} - \frac{1}{3} \sum_{n \geq 0} z^{-n-1}.$$

Les coefficients sont $a_n = -\frac{1}{3 \cdot 4^{n+1}}$ pour $n \geq 0$ et $a_{-n-1} = -\frac{1}{3}$ pour $n \geq 0$. Sur le disque $|z| < 1$, le même calcul avec $\frac{1}{z-1} = -\sum z^n$ donnerait un développement de Taylor : aucune puissance négative.

2. Types de singularités isolées

D Singularité isolée

On dit que a est une singularité isolée de f si f est holomorphe sur un disque épointé $D^*(a, R) = \{0 < |z - a| < R\}$ mais pas (forcément) en a . La série de Laurent de f sur ce disque épointé permet de classer a .

- Si $a_n = 0$ pour tout $n < 0$: la singularité est **effaçable** ; f se prolonge en une fonction holomorphe en a en posant $f(a) = a_0$.
- S'il existe $m \geq 1$ avec $a_{-m} \neq 0$ et $a_n = 0$ pour $n < -m$: a est un **pôle d'ordre m** .
- Si $a_n \neq 0$ pour une infinité d'indices $n < 0$: la singularité est **essentielle**.

P

Théorème de Riemann

Si f est holomorphe et bornée sur un disque épointé $D^*(a, R)$, alors a est une singularité effaçable.

Démonstration : si $|f| \leq M$, la formule des coefficients donne, pour $n < 0$ et $\rho < R$, $|a_n| \leq M\rho^{-n}$. En faisant tendre ρ vers 0, on obtient $a_n = 0$ puisque $-n > 0$.

P

Caractérisation des pôles

Les assertions suivantes sont équivalentes : (i) a est un pôle de f ; (ii) $|f(z)| \rightarrow +\infty$ quand $z \rightarrow a$; (iii) il existe $m \geq 1$ et g holomorphe en a avec $g(a) \neq 0$ telles que $f(z) = \frac{g(z)}{(z-a)^m}$. L'entier m est alors l'ordre du pôle.

Pour une singularité essentielle, le comportement est au contraire chaotique :

P

Théorème de Casorati-Weierstrass

Si a est une singularité essentielle de f , alors pour tout $\varepsilon > 0$ l'image du disque épointé $D^*(a, \varepsilon)$ par f est dense dans $\mathbb{C}$.

Idée de la preuve : si l'image évitait un disque $D(c, \delta)$, la fonction $1/(f - c)$ serait bornée près de a , donc prolongeable (Riemann), et f aurait un pôle ou une singularité effaçable, contradiction.

Type en a	Partie principale	Comportement de $f(z)$ quand $z \rightarrow a$	Exemple en 0
effaçable	nulle	limite finie	$\frac{\sin z}{z}$
pôle d'ordre m	finie, $a_{-m} \neq 0$	$ f \rightarrow +\infty$	$\frac{1}{z^3}$
essentielle	infinie	aucune limite, image dense	$e^{1/z}$

E Exemple 2 : reconnaître un type

$\frac{\sin z}{z} = 1 - \frac{z^2}{6} + \frac{z^4}{120} - \dots$ n'a aucune puissance négative : singularité effaçable en 0 , de valeur prolongée **1**. La fonction $\frac{\cos z}{z^2} = \frac{1}{z^2} - \frac{1}{2} + \frac{z^2}{24} - \dots$ possède un pôle d'ordre **2**. Enfin $e^{1/z} = \sum_{n \geq 0} \frac{z^{-n}}{n!}$ contient une infinité de puissances négatives : 0 est une singularité essentielle.

3. Fonctions méromorphes

D Fonction méromorphe

Soit U un ouvert de $\mathbb{C}$. Une fonction f est méromorphe sur U s'il existe une partie $P \subset U$ sans point d'accumulation dans U telle que f soit holomorphe sur $U \setminus P$ et que chaque point de P soit un pôle de f .

Les fractions rationnelles, $\tan z$, $\frac{1}{\sin z}$, $\frac{1}{e^z - 1}$ sont méromorphes sur $\mathbb{C}$. Quand U est connexe, l'ensemble des fonctions méromorphes sur U est un corps : somme, produit et quotient d'une

fonction méromorphe par une fonction méromorphe non identiquement nulle restent méromorphes (après effacement des singularités fictives).

Pour trouver les pôles d'un quotient g/h de fonctions holomorphes, on cherche les zéros de h . Si h s'annule à l'ordre p en a et g à l'ordre q (avec $q = 0$ si $g(a) \neq 0$), alors :

- si $q < p$, a est un pôle d'ordre $p - q$;
- si $q \geq p$, a est une singularité effaçable.

4. Résidus

D Résidu

Si a est une singularité isolée de f de développement de Laurent $\sum a_n(z-a)^n$, le **résidu** de f en a est le coefficient $\text{Res}(f, a) = a_{-1} = \frac{1}{2\pi i} \oint_{|z-a|=\rho} f(z) dz$.

La seconde égalité vient de la formule des coefficients pour $n = -1$: seul le terme en $(z-a)^{-1}$ survit à l'intégration sur le cercle, car $\oint (z-a)^k dz = 0$ pour $k \neq -1$.

M Calculer un résidu en un pôle

1. Pôle simple : $\text{Res}(f, a) = \lim_{z \rightarrow a} (z-a)f(z)$. Si $f = g/h$ avec $h(a) = 0$, $h'(a) \neq 0$:

$$\text{Res}(f, a) = \frac{g(a)}{h'(a)}.$$

2. Pôle d'ordre m : $\text{Res}(f, a) = \frac{1}{(m-1)!} \lim_{z \rightarrow a} \frac{d^{m-1}}{dz^{m-1}} [(z-a)^m f(z)]$.

3. En cas de doute, développer en série de Laurent et lire le coefficient de $(z-a)^{-1}$.

E Exemple 3 : pôle double et pôle simple

Soit $f(z) = \frac{z}{(z-1)^2(z+3)}$. En $a = 1$, pôle d'ordre 2 : on pose $g(z) = \frac{z}{z+3}$, donc $g'(z) = \frac{3}{(z+3)^2}$ et $\text{Res}(f, 1) = g'(1) = \frac{3}{16}$. En $a = -3$, pôle simple : $\text{Res}(f, -3) = \frac{-3}{(-4)^2} = -\frac{3}{16}$. La somme des résidus est nulle, ce qui est cohérent avec $f(z) \sim 1/z^2$ à l'infini.

E Exemple 4 : quotient

Pour $f(z) = \frac{1}{z^4 - 16}$ au pôle simple $a = 2$: $h(z) = z^4 - 16$, $h'(z) = 4z^3$, donc $\text{Res}(f, 2) = \frac{1}{4 \cdot 8} = \frac{1}{32}$.

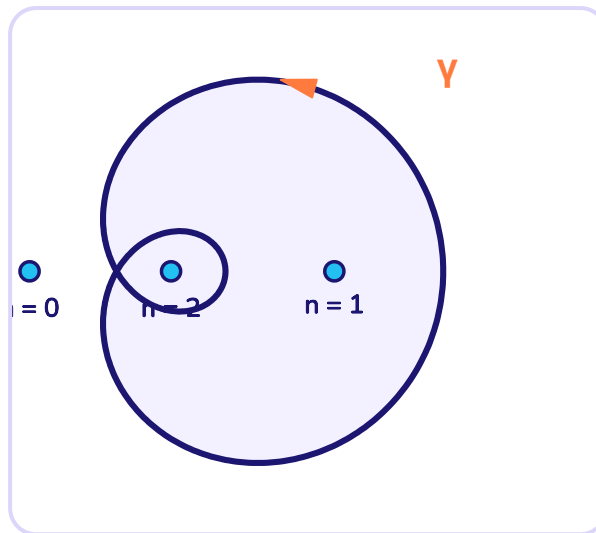
5. Indice d'un lacet

Un **lacet** est un chemin fermé $\gamma : [0, 1] \rightarrow \mathbb{C}$, de classe C^1 par morceaux. Son image est notée γ^* .

D Indice

Pour $a \notin \gamma^*$, l'indice de γ par rapport à a est $n(\gamma, a) = \frac{1}{2\pi i} \oint_{\gamma} \frac{dz}{z-a}$.

C'est un **nombre entier** : il compte combien de fois γ tourne autour de a , positivement dans le sens trigonométrique. Il est constant sur chaque composante connexe de $\mathbb{C} \setminus \gamma^*$ et nul sur la composante non bornée. Pour un cercle parcouru une fois dans le sens direct, l'indice vaut 1 à l'intérieur, 0 à l'extérieur ; parcouru k fois, il vaut k ; parcouru dans le sens horaire, il vaut -1 .



Sur le limaçon ci-dessus, la boucle intérieure ajoute un tour : l'indice est **2** dans la petite boucle, **1** entre les deux boucles, **0** à l'extérieur.

6. Le théorème des résidus

P Théorème des résidus

Soit U un ouvert simplement connexe, $a_1, \dots, a_k$ des points de U , f holomorphe sur $U \setminus \{a_1, \dots, a_k\}$, et γ un lacet de U ne passant par aucun a_j . Alors

$$\oint_{\gamma} f(z) dz = 2\pi i \sum_{j=1}^k n(\gamma, a_j) \operatorname{Res}(f, a_j).$$

Idée de la preuve : on retranche à f la partie principale de son développement en chaque a_j . La différence h est holomorphe sur tout U , donc $\oint_{\gamma} h = 0$ (théorème de Cauchy). Reste l'intégrale des parties principales : chaque terme $(z - a_j)^{-m}$ avec $m \geq 2$ a une primitive, donc intègre à zéro sur un lacet, et il reste $a_{-1} \oint_{\gamma} \frac{dz}{z - a_j} = 2\pi i n(\gamma, a_j) a_{-1}$.

M**Appliquer le théorème**

1. Repérer les singularités de f et dire lesquelles sont à l'intérieur du lacet.
2. Calculer l'indice de chacune.
3. Calculer les résidus utiles uniquement.
4. Conclure par la formule $2\pi i \sum n \cdot \text{Res}$.

E**Exemple 5 : intégrale sur un cercle**

Calculons $\oint_{|z|=3} \frac{z+1}{z(z-2)(z+4)} dz$, cercle parcouru une fois dans le sens direct. Les pôles sont $0, 2$ (dans le disque) et -4 (à l'extérieur : $|-4| = 4 > 3$). Alors

$$\text{Res}(f, 0) = \frac{1}{(-2)(4)} = -\frac{1}{8} \text{ et } \text{Res}(f, 2) = \frac{3}{2 \cdot 6} = \frac{1}{4}.$$

Donc l'intégrale vaut

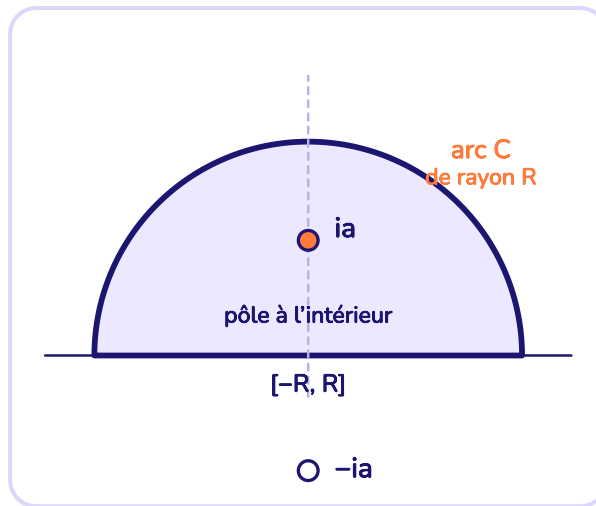
$$2\pi i \left(-\frac{1}{8} + \frac{1}{4} \right) = \frac{\pi i}{4}.$$
7. Calcul d'intégrales réelles

Le théorème des résidus transforme une intégrale réelle en une somme de résidus, à condition de la voir comme la partie d'un contour fermé. Trois situations reviennent sans cesse.

P**Type 1 : fractions rationnelles sur $\mathbb{R}$**

Si $R = P/Q$ est une fraction rationnelle sans pôle réel avec $\deg Q \geq \deg P + 2$,

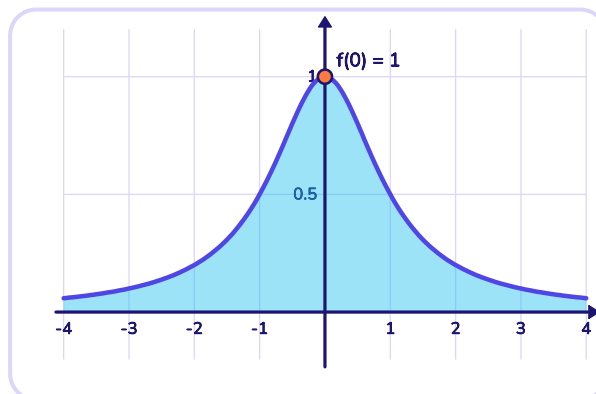
alors
$$\int_{-\infty}^{+\infty} R(x) dx = 2\pi i \sum_{\text{Im } a > 0} \text{Res}(R, a).$$



On intègre sur le contour formé du segment $[-R, R]$ et de l'arc de cercle supérieur. Sur l'arc, $|R(z)| \leq C/|z|^2$, donc l'intégrale est majorée par $\pi\rho \cdot C/\rho^2 \rightarrow 0$ quand le rayon ρ tend vers l'infini.

E Exemple 6 : fraction rationnelle

Calculons $I = \int_{-\infty}^{+\infty} \frac{dx}{x^2 + 4x + 13}$. Le dénominateur s'annule en $-2 \pm 3i$; seul $-2 + 3i$ est dans le demi-plan supérieur. Résidu : $\frac{1}{2z + 4}$ en $z = -2 + 3i$ donne $\frac{1}{6i}$. Donc $I = 2\pi i \cdot \frac{1}{6i} = \frac{\pi}{3}$.



P

Type 2 : fonctions trigonométriques

Pour R rationnelle en deux variables, avec $z = e^{i\theta}$, $\cos \theta = \frac{1}{2}(z + z^{-1})$,

$$\sin \theta = \frac{1}{2i}(z - z^{-1}) \text{ et } d\theta = \frac{dz}{iz} :$$

$$\int_0^{2\pi} R(\cos \theta, \sin \theta) d\theta = \oint_{|z|=1} \frac{1}{iz} R\left(\frac{z+z^{-1}}{2}, \frac{z-z^{-1}}{2i}\right) dz = 2\pi i \sum_{|a|<1} \text{Res}(F, a),$$

$$\text{où } F(z) = \frac{1}{iz} R\left(\frac{z+z^{-1}}{2}, \frac{z-z^{-1}}{2i}\right).$$

Autrement dit, on ne garde que les résidus de F situés dans le disque unité ouvert, multipliés par $2\pi i$.

E

Exemple 7 : intégrale trigonométrique

Calculons $J = \int_0^{2\pi} \frac{d\theta}{13 + 5 \sin \theta}$. Avec $z = e^{i\theta}$, $J = \oint_{|z|=1} \frac{2 dz}{5z^2 + 26iz - 5}$. Les racines de $5z^2 + 26iz - 5$ sont $-\frac{i}{5}$ et $-5i$; seule $-\frac{i}{5}$ est dans le disque unité. Le résidu en $-i/5$ est $\frac{2}{5(z_0 - z_1)} = \frac{2}{5 \cdot \frac{24i}{5}} = \frac{1}{12i}$. Donc $J = 2\pi i \cdot \frac{1}{12i} = \frac{\pi}{6}$.

P

Type 3 : intégrales de Fourier (lemme de Jordan)

Si f est une fraction rationnelle sans pôle réel qui tend vers 0 à l'infini, alors pour

$\lambda > 0$, l'intégrale $\int_{-\infty}^{+\infty} f(x) e^{i\lambda x} dx$ converge et vaut $2\pi i \sum_{\text{Im } a > 0} \text{Res}(f(z) e^{i\lambda z}, a)$.

On obtient les intégrales en cosinus et sinus en prenant partie réelle et partie imaginaire.

E**Exemple 8 : intégrale de Fourier**

Calculons $K = \int_{-\infty}^{+\infty} \frac{\cos 2x}{x^2 + 1} dx$. On considère $\frac{e^{2iz}}{z^2 + 1}$, de résidu $\frac{e^{-2}}{2i}$ en i . Alors

$$\int \frac{e^{2ix}}{x^2 + 1} dx = 2\pi i \cdot \frac{e^{-2}}{2i} = \pi e^{-2}, \text{ nombre réel : la partie réelle donne } K = \pi e^{-2},$$

et la partie imaginaire (intégrale du sinus, impaire) est nulle.

!**Astuce de Zyro**

Avant de te lancer dans un calcul de résidu, dessine le contour et place les pôles : la moitié des erreurs vient d'un pôle oublié ou d'un pôle compté à l'intérieur alors qu'il est dehors.

⚠**Piège**

Le terme $e^{i\lambda z}$ doit décroître sur l'arc : avec $\lambda > 0$, on ferme dans le demi-plan **supérieur**. Pour $\lambda < 0$, il faut fermer dans le demi-plan inférieur, et le contour est alors parcouru dans le sens horaire (signe — devant $2\pi i$).

À retenir

- Sur une couronne, une fonction holomorphe a un unique développement de Laurent ; il dépend de la couronne choisie.
- Une singularité isolée est effaçable (partie principale nulle), un pôle d'ordre m (partie principale finie) ou essentielle (partie principale infinie).
- Riemann : bornée implique effaçable. Casorati-Weierstrass : près d'une singularité essentielle, l'image est dense.
- Le résidu est le coefficient a_{-1} ; pôle simple : $\lim_{z \rightarrow a} (z - a)f(z)$; pôle d'ordre m : dérivée d'ordre $m - 1$.
- L'indice $n(\gamma, a)$ est un entier qui compte les tours de γ autour de a .
- $\oint_{\gamma} f = 2\pi i \sum n(\gamma, a_j) \text{Res}(f, a_j)$.
- Intégrales réelles : fractions rationnelles (demi-plan supérieur), fonctions trigonométriques ($z = e^{i\theta}$), intégrales de Fourier (lemme de Jordan).

Le livre de cours de maths Licence L3

Tout le programme en un seul PDF de 101 pages, à imprimer ou à garder sur ta tablette.

Voir le livre

 **Zyro te conseille la suite**

 Exercices de maths

Singularités et théorème des résidus :
exercices de maths Licence L3

 Contrôles de maths

Singularités et théorème des résidus :
contrôle de maths Licence L3

 QCM de maths

Singularités et théorème des résidus :
QCM de maths Licence L3

 Exercices de maths

Réduction des endomorphismes :
exercices de maths Licence L3

 Exercices de maths

Groupes, anneaux et corps : exercices de
maths Licence L3

 Contrôles de maths

Réduction des endomorphismes :
contrôle de maths Licence L3

Zyro vous emmène sur nos sites partenaires

Embarquez pour d'autres planètes du savoir et leurs applis.

Décollage