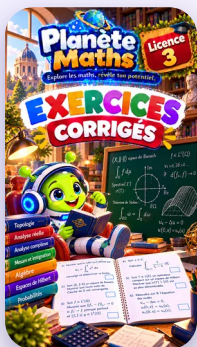


Singularités et théorème des résidus : exercices corrigés de maths Licence L3 à télécharger en PDF



Le livre d'exercices corrigés de maths Licence L3

Tout le programme en un seul PDF de 126 pages, à imprimer ou à garder sur ta tablette.

[Voir le livre](#)

Corrigés rédigés des exercices du chapitre. Vérifie chaque étape, puis corrige-toi.

1 Laurent de l'exponentielle inverse



On part de $e^w = \sum_{n \geq 0} \frac{w^n}{n!}$ avec $w = 1/z$, valable pour tout $z \neq 0$:

$$e^{1/z} = \sum_{n \geq 0} \frac{z^{-n}}{n!} = 1 + \frac{1}{z} + \frac{1}{2z^2} + \dots$$

Tous les coefficients $a_{-n} = \frac{1}{n!}$ sont non nuls : la partie principale est infinie, donc **0** est une **singularité essentielle**. Le résidu est le coefficient de z^{-1} : $a_{-1} = \frac{1}{1!} = 1$.

2 Une singularité effaçable



On a $\sin 3z = 3z - \frac{27z^3}{6} + \dots = 3z - \frac{9z^3}{2} + \dots$, donc $f(z) = 3 - \frac{9z^2}{2} + \dots$.

Aucune puissance négative n'apparaît : la singularité est effaçable. En posant $f(0) = 3$, f devient holomorphe sur $\mathbb{C}$. On retrouve aussi $\lim_{z \rightarrow 0} f(z) = 3$.

3 Pôles et résidus de $1/(z^2+4)$



Le dénominateur s'annule pour $z^2 = -4$, soit $z = \pm 2i$. On a $z^2 + 4 = (z - 2i)(z + 2i)$: les deux racines sont simples, donc ce sont des **pôles simples**.

Avec $h(z) = z^2 + 4$, $h'(z) = 2z$:

- $\text{Res}(f, 2i) = \frac{1}{4i} = -\frac{i}{4}$;
- $\text{Res}(f, -2i) = \frac{1}{-4i} = \frac{i}{4}$.

Leur somme est nulle, ce qui est normal car $f(z) \sim 1/z^2$ à l'infini.

4 Deux résidus d'une fraction



Les pôles 1 et 3 sont simples.

- $\text{Res}(f, 1) = \lim_{z \rightarrow 1} \frac{z+2}{z-3} = \frac{3}{-2} = -\frac{3}{2}$;
- $\text{Res}(f, 3) = \lim_{z \rightarrow 3} \frac{z+2}{z-1} = \frac{5}{2}$.

La somme vaut $-\frac{3}{2} + \frac{5}{2} = 1$. C'est cohérent : $f(z) \sim \frac{1}{z}$ à l'infini.

5 Indice d'un cercle orienté



On compare la distance au centre **1** avec le rayon **2** :

- $|0 - 1| = 1 < 2$: **0** est à l'intérieur ;
- $|2 - 1| = 1 < 2$: **2** est à l'intérieur ;
- $|4 - 1| = 3 > 2$: **4** est à l'extérieur.

Le sens est horaire, donc $n(\gamma, 0) = -1$, $n(\gamma, 2) = -1$ et $n(\gamma, 4) = 0$.

Par définition de l'indice, $\oint_{\gamma} \frac{dz}{z-2} = 2\pi i n(\gamma, 2) = -2\pi i$.

6 Deux intégrales sur le cercle unité



a. La seule singularité est **0**, pôle simple de résidu $e^0 = 1$. Donc l'intégrale vaut $2\pi i \cdot 1 = 2\pi i$. (1 seule singularité, indice 1.)

b. Au pôle **0**, $\cos z = 1 - \frac{z^2}{2} + \dots$, donc $\frac{\cos z}{z^3} = \frac{1}{z^3} - \frac{1}{2z} + \dots$. Le résidu est $-\frac{1}{2}$ et l'intégrale vaut $2\pi i \cdot \left(-\frac{1}{2}\right) = -\pi i$.

7 Ordre d'un pôle et résidu



On a $e^z - 1 = z + \frac{z^2}{2} + \frac{z^3}{6} + \dots = z \left(1 + \frac{z}{2} + \frac{z^2}{6} + \dots\right)$, donc $z(e^z - 1) = z^2 u(z)$

avec u holomorphe et $u(0) = 1 \neq 0$. Le pôle est d'ordre **2**.

Ensuite $\frac{1}{u(z)} = 1 - \frac{z}{2} + \dots$, d'où $f(z) = \frac{1}{z^2} - \frac{1}{2z} + \dots$. Le résidu est $-\frac{1}{2}$.

8 Deux développements de $1/(z(z-1))$



On décompose : $f(z) = \frac{1}{z-1} - \frac{1}{z}$.

a. Pour $|z| < 1$, $\frac{1}{z-1} = -\sum_{n \geq 0} z^n$, donc $f(z) = -\frac{1}{z} - 1 - z - z^2 - \dots$. Le coefficient de z^{-1} est -1 .

b. Pour $|z| > 1$, $\frac{1}{z-1} = \sum_{n \geq 0} z^{-n-1} = \frac{1}{z} + \frac{1}{z^2} + \dots$, donc $f(z) = \frac{1}{z^2} + \frac{1}{z^3} + \dots$. Le coefficient de z^{-1} est 0 .

Vérification : en (b), le cercle $|z| = \rho > 1$ entoure les deux pôles de résidus -1 et 1 , de somme 0 .

9 Résidus en un pôle multiple



a. Pôle d'ordre 3 : $e^{2z} = 1 + 2z + 2z^2 + \dots$, le coefficient de z^2 est $\frac{2^2}{2!} = 2$. Donc

$$\text{Res} = 2. \text{ Avec la formule : } \frac{1}{2!} \frac{d^2}{dz^2} e^{2z} \Big|_0 = \frac{4}{2} = 2.$$

b. Pôle d'ordre 2 : $\text{Res} = \frac{d}{dz} e^z \Big|_{z=1} = e$.

10 Résidu au carré et intégrale



On écrit $f(z) = \frac{g(z)}{(z-i)^2}$ avec $g(z) = \frac{1}{(z+i)^2}$. Le pôle i est double et

$$\text{Res}(f, i) = g'(i) = \frac{-2}{(z+i)^3} \Big|_{z=i} = \frac{-2}{(2i)^3} = \frac{-2}{-8i} = \frac{1}{4i} = -\frac{i}{4}.$$

Le dénominateur est de degré 4 , le numérateur de degré 0 (écart $4 \geq 2$), et il n'y a pas de pôle réel. Un seul pôle (i) est dans le demi-plan supérieur, donc

$$\int_{\mathbb{R}} \frac{dx}{(1+x^2)^2} = 2\pi i \cdot \left(-\frac{i}{4}\right) = \frac{\pi}{2}.$$

11 Résidu de $1/(z^2 \sin z)$



On a $\sin z = z \left(1 - \frac{z^2}{6} + \dots \right)$, donc $\frac{1}{\sin z} = \frac{1}{z} \left(1 + \frac{z^2}{6} + \dots \right) = \frac{1}{z} + \frac{z}{6} + \dots$.

Alors $\frac{1}{z^2 \sin z} = \frac{1}{z^3} + \frac{1}{6z} + \dots$: pôle d'ordre 3, de résidu $\frac{1}{6}$.

12 Pôles de $1/(e^z - 1)$



$e^z = 1$ si et seulement si $z = 2ik\pi$, $k \in \mathbb{Z}$. Ces points forment un ensemble discret, et $\frac{d}{dz}(e^z - 1) = e^z = 1$ en chacun : les zéros sont simples, donc ce sont des pôles simples de f . f est méromorphe sur $\mathbb{C}$.

Résidu : $\frac{1}{e^{2ik\pi}} = 1$ pour tout k .

En 0 : $e^z - 1 = z \left(1 + \frac{z}{2} + \frac{z^2}{6} + \dots \right)$ et $\frac{1}{1 + \frac{z}{2} + \frac{z^2}{6}} = 1 - \frac{z}{2} + \frac{z^2}{12} + \dots$, donc

$f(z) = \frac{1}{z} - \frac{1}{2} + \frac{z}{12} + \dots$.

13 Une intégrale trigonométrique



Avec $z = e^{i\theta}$, $\cos \theta = \frac{z + z^{-1}}{2}$ et $d\theta = \frac{dz}{iz}$, l'intégrale devient

$$\oint_{|z|=1} \frac{dz}{iz \left(5 + \frac{3}{2}(z + z^{-1}) \right)} = \oint_{|z|=1} \frac{2 dz}{i(3z^2 + 10z + 3)}.$$

$3z^2 + 10z + 3 = 0$ a pour racines $\frac{-10 \pm 8}{6}$, soit $-\frac{1}{3}$ et -3 . Seule $-\frac{1}{3}$ est dans le disque unité.

Résidu en $-\frac{1}{3}$: $\frac{2}{i(6z + 10)} \Big|_{-1/3} = \frac{2}{8i} = \frac{1}{4i}$.

Donc l'intégrale vaut $2\pi i \cdot \frac{1}{4i} = \frac{\pi}{2}$.

14 Produit de deux fractions



Dans le demi-plan supérieur, les pôles sont i et $2i$ (simples).

- $\text{Res}(f, i) = \frac{1}{2i(i^2 + 4)} = \frac{1}{2i \cdot 3} = \frac{1}{6i}$;
- $\text{Res}(f, 2i) = \frac{1}{((2i)^2 + 1) \cdot 4i} = \frac{1}{(-3)(4i)} = -\frac{1}{12i}$.

Somme : $\frac{1}{6i} - \frac{1}{12i} = \frac{1}{12i}$. Donc l'intégrale vaut $2\pi i \cdot \frac{1}{12i} = \frac{\pi}{6}$.

Vérification : $\frac{1}{(x^2 + 1)(x^2 + 4)} = \frac{1}{3} \left(\frac{1}{x^2 + 1} - \frac{1}{x^2 + 4} \right)$, et $\int \frac{dx}{x^2 + 1} = \pi$,
 $\int \frac{dx}{x^2 + 4} = \frac{\pi}{2}$, d'où $\frac{1}{3} \left(\pi - \frac{\pi}{2} \right) = \frac{\pi}{6}$.

15 Une intégrale de Fourier



On considère $g(z) = \frac{e^{iz}}{z^2 + 9}$. Dans le demi-plan supérieur, seul $3i$ est un pôle (simple), de résidu $\frac{e^{i \cdot 3i}}{2 \cdot 3i} = \frac{e^{-3}}{6i}$.

Par le lemme de Jordan ($\lambda = 1 > 0$ et $\frac{1}{x^2 + 9} \rightarrow 0$), $\int_{\mathbb{R}} \frac{e^{ix}}{x^2 + 9} dx = 2\pi i \cdot \frac{e^{-3}}{6i} = \frac{\pi e^{-3}}{3}$.

Cette valeur est réelle ; la partie réelle de l'intégrale est celle de $\cos x$, donc

$$\int_{\mathbb{R}} \frac{\cos x}{x^2 + 9} dx = \frac{\pi}{3e^3}.$$

16 Intégrale de $1/(x^4+1)$ sur $[0; +\infty[$

★★★

La fonction est paire, donc $\int_0^{+\infty} = \frac{1}{2} \int_{\mathbb{R}}$. Les pôles de $\frac{1}{z^4+1}$ sont les racines quatrièmes de -1 ; ceux du demi-plan supérieur sont $z_1 = e^{i\pi/4}$ et $z_2 = e^{3i\pi/4}$.

Pour un pôle simple, $\text{Res} = \frac{1}{4z^3}$. Comme $z^4 = -1$, $\frac{1}{z^3} = \frac{z}{z^4} = -z$, donc $\text{Res} = -\frac{z}{4}$.

Somme : $-\frac{z_1+z_2}{4} = -\frac{i\sqrt{2}}{4}$ (les parties réelles $\pm \frac{\sqrt{2}}{2}$ se compensent, les parties imaginaires valent chacune $\frac{\sqrt{2}}{2}$).

Donc $\int_{\mathbb{R}} \frac{dx}{x^4+1} = 2\pi i \cdot \left(-\frac{i\sqrt{2}}{4}\right) = \frac{\pi\sqrt{2}}{2}$, puis $\int_0^{+\infty} \frac{dx}{x^4+1} = \frac{\pi\sqrt{2}}{4}$.

17 Cercle et trois pôles

★★★

Les pôles sont $1, -2$ (à l'intérieur de $|z| < 3$) et 5 (à l'extérieur). Tous sont simples.

- $\text{Res}(f, 1) = \frac{3}{(1+2)(1-5)} = -\frac{1}{4}$;
- $\text{Res}(f, -2) = \frac{-3}{(-2-1)(-2-5)} = \frac{-3}{21} = -\frac{1}{7}$.

Somme : $-\frac{1}{4} - \frac{1}{7} = -\frac{11}{28}$. L'intégrale vaut donc $2\pi i \cdot \left(-\frac{11}{28}\right) = -\frac{11\pi i}{14}$.

18 Lacet à boucle intérieure

★★★

Les pôles de $f(z) = \frac{1}{(z - \frac{1}{4})(z-1)}$ sont $A = \frac{1}{4}$ et $B = 1$, simples.

- $\text{Res}(f, A) = \frac{1}{\frac{1}{4} - 1} = -\frac{4}{3}$;
- $\text{Res}(f, B) = \frac{1}{1 - \frac{1}{4}} = \frac{4}{3}$.

Par le théorème des résidus :

$$\oint_{\gamma} f = 2\pi i \left(2 \cdot \left(-\frac{4}{3}\right) + 1 \cdot \frac{4}{3} \right) = 2\pi i \cdot \left(-\frac{4}{3}\right) = -\frac{8\pi i}{3}.$$

19 Casorati sur $e^{1/z}$

★★★

a. Soit L une valeur de $\log c$, c'est-à-dire $e^L = c$. Pour n entier assez grand, posons

$$z_n = \frac{1}{L + 2i\pi n}. \text{ Alors } |z_n| \rightarrow 0 \text{ et } f(z_n) = e^{L+2i\pi n} = c.$$

b. Prenons $w_n = -\frac{1}{n}$, réel négatif : $f(w_n) = e^{-n} \rightarrow 0$.

c. En (b) f tend vers 0 le long d'une suite, tandis que $f(1/n) = e^n \rightarrow +\infty$: pas de limite. De plus, tout $c \neq 0$ est atteint dans tout disque épointé $D^*(0, \varepsilon)$ par (a), et 0 est adhérent à l'image par (b). L'image de tout disque épointé contient donc $\mathbb{C}^*$ (et ne contient pas 0, puisque l'exponentielle ne s'annule jamais) : elle est dense dans $\mathbb{C}$.

20 Intégrale de $1/(2 + \cos \theta)^2$

★★★

Avec $z = e^{i\theta}$: $2 + \cos \theta = \frac{z^2 + 4z + 1}{2z}$, et l'intégrale devient

$$\oint_{|z|=1} \frac{4z^2}{(z^2 + 4z + 1)^2} \cdot \frac{dz}{iz} = \oint_{|z|=1} \frac{4z}{i(z^2 + 4z + 1)^2} dz.$$

Les racines de $z^2 + 4z + 1$ sont $z_0 = -2 + \sqrt{3}$ (de module $\approx 0,27 < 1$) et $z_1 = -2 - \sqrt{3}$ (de module $\approx 3,73 > 1$). Seul z_0 est un pôle (double) intérieur.

On écrit $f(z) = \frac{g(z)}{(z - z_0)^2}$ avec $g(z) = \frac{4z}{i(z - z_1)^2}$. Alors

$$g'(z) = \frac{4}{i} \cdot \frac{(z - z_1) - 2z}{(z - z_1)^3} = \frac{4}{i} \cdot \frac{-z - z_1}{(z - z_1)^3}. \text{ En } z_0 : -z_0 - z_1 = 4 \text{ et } z_0 - z_1 = 2\sqrt{3},$$

$$\text{donc Res} = \frac{4}{i} \cdot \frac{4}{24\sqrt{3}} = \frac{2}{3\sqrt{3}i}.$$

$$\text{Résultat : } 2\pi i \cdot \frac{2}{3\sqrt{3}i} = \frac{4\pi}{3\sqrt{3}}.$$

21 Intégrale de $x \sin x / (x^2+1)$



Pour x réel, $\frac{x \sin x}{x^2+1} = \operatorname{Im} \frac{x e^{ix}}{x^2+1}$. Considérons $g(z) = \frac{z e^{iz}}{z^2+1}$, de pôle simple i dans le demi-plan supérieur, avec $\frac{z e^{iz}}{z^2+1} \rightarrow 0$ à l'infini : le lemme de Jordan s'applique.

Résidu en i : $\frac{i e^{i \cdot i}}{2i} = \frac{e^{-1}}{2}$.

Donc $\int_{\mathbb{R}} \frac{x e^{ix}}{x^2+1} dx = 2\pi i \cdot \frac{1}{2e} = \frac{i\pi}{e}$. La partie imaginaire est $\frac{\pi}{e}$; c'est l'intégrale cherchée (la partie réelle, intégrale de $\frac{x \cos x}{x^2+1}$, est nulle par imparité).

Le livre d'exercices corrigés de maths Licence L3

Tout le programme en un seul PDF de 126 pages, à imprimer ou à garder sur ta tablette.

[Voir le livre](#)

Zyro te conseille la suite

Exercices de maths

Singularités et théorème des résidus :
exercices de maths Licence L3

QCM de maths

Singularités et théorème des résidus :
QCM de maths Licence L3



Contrôles de maths

Singularités et théorème des résidus :
contrôle de maths Licence L3



Exercices de maths

Réduction des endomorphismes :
exercices de maths Licence L3



Exercices de maths

Groupes, anneaux et corps : exercices de
maths Licence L3



QCM de maths

Réduction des endomorphismes : QCM
de maths Licence L3

Zyro vous emmène sur nos sites partenaires

Embarquez pour d'autres planètes du savoir et leurs applis.

Décollage