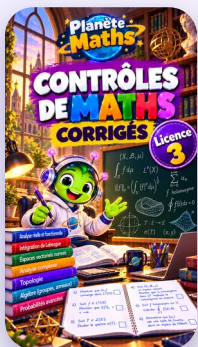


Singularités et théorème des résidus : corrigé du contrôle de maths Licence L3 à télécharger en PDF



Le livre de contrôles corrigés de maths Licence L3

Tout le programme en un seul PDF de 52 pages, à imprimer ou à garder sur ta tablette.

Voir le livre

Corrigé du contrôle avec le barème détaillé. Compte tes points et repère ce qu'il faut revoir.

Durée conseillée : 45 minutes. Barème sur 20 points. Calculatrice autorisée seulement quand l'énoncé le précise.

1 Nature des singularités

/ 3 pts

(a) $e^z - 1 - z = \frac{z^2}{2} + \frac{z^3}{6} + \dots$, donc $f(z) = \frac{1}{2} + \frac{z}{6} + \dots$: singularité effaçable, valeur prolongée $\frac{1}{2}$, résidu 0. (1 pt)

(b) $g(z) = z^{-3} - \frac{1}{6}z^{-1} + \frac{z}{120} - \dots$: pôle d'ordre 3, résidu $-\frac{1}{6}$. (1 pt)

(c) $h(z) = \sum_{n \geq 0} \frac{z^{-2n}}{n!}$: infinité de puissances négatives, singularité essentielle ; seules des puissances paires apparaissent, donc le coefficient de z^{-1} est nul : résidu 0. (1 pt)

2 Séries de Laurent

/ 4 pts

(a) $f(z) = \frac{1}{2} \left(\frac{1}{z+1} - \frac{1}{z+3} \right)$. Sur $1 < |z| < 3$: $\frac{1}{z+1} = \sum_{n \geq 0} (-1)^n z^{-n-1}$ et $\frac{1}{z+3} = \frac{1}{3} \sum_{n \geq 0} \frac{(-1)^n z^n}{3^n}$. Donc

$$f(z) = \frac{1}{2} \sum_{n \geq 0} (-1)^n z^{-n-1} - \frac{1}{2} \sum_{n \geq 0} \frac{(-1)^n z^n}{3^{n+1}} = \dots + \frac{-1}{2z^2} + \frac{1}{2z} - \frac{1}{6} + \frac{z}{18} - \dots$$

(2 pts)

(b) Le coefficient de z^{-1} est $\frac{1}{2}$. Le résidu en -1 est $\frac{1}{-1+3} = \frac{1}{2}$: c'est cohérent, car le cercle $|z| = 2$ n'entoure que le pôle -1 . (1 pt)

(c) Sur $|z| < 1$, $\frac{1}{z+1} = \sum (-1)^n z^n$ et $\frac{1}{z+3} = \frac{1}{3} \sum \frac{(-1)^n z^n}{3^n}$: le terme constant vaut $\frac{1}{2} \left(1 - \frac{1}{3} \right) = \frac{1}{3}$. (1 pt)

3 Résidus et intégrales

/ 4 pts

(a) 0 est un pôle simple, 2 un pôle double (le numérateur ne s'annule ni en 0 ni en 2). (1 pt)

(b) $\text{Res}(f, 0) = \frac{0+1}{(0-2)^2} = \frac{1}{4}$. (1 pt) Pour 2 , $g(z) = \frac{z^2+1}{z} = z + \frac{1}{z}$, $g'(z) = 1 - \frac{1}{z^2}$, donc $\text{Res}(f, 2) = g'(2) = \frac{3}{4}$. (1 pt)

(c) Le cercle $|z| = 3$ entoure les deux pôles : $2\pi i \left(\frac{1}{4} + \frac{3}{4} \right) = 2\pi i$. Le cercle $|z-2| = 1$ n'entoure que 2 (car $|0-2| = 2 > 1$) : $2\pi i \cdot \frac{3}{4} = \frac{3\pi i}{2}$. (1 pt)

4 Intégrale réelle

/ 4 pts

On a $x^2 + 2x + 5 = (x + 1)^2 + 4$, qui s'annule en $p = -1 + 2i$ et $\bar{p} = -1 - 2i$: pas de pôle réel, et le degré du dénominateur est $4 \geq 0 + 2$, donc le contour en demi-disque convient (l'arc donne une contribution qui tend vers 0). Seul p est dans le demi-plan supérieur ; c'est un pôle double. (1 pt)

On écrit $f(z) = \frac{1}{(z-p)^2(z-\bar{p})^2}$, donc

$$\text{Res}(f, p) = \frac{d}{dz}(z-\bar{p})^{-2} \Big|_{z=p} = \frac{-2}{(p-\bar{p})^3} = \frac{-2}{(4i)^3} = \frac{-2}{-64i} = \frac{1}{32i}. \quad (2 \text{ pts})$$

$$\text{Donc } \int_{\mathbb{R}} \frac{dx}{(x^2 + 2x + 5)^2} = 2\pi i \cdot \frac{1}{32i} = \frac{\pi}{16}. \quad (1 \text{ pt})$$

5 Intégrale trigonométrique

/ 3 pts

On pose $z = e^{i\theta}$: $\sin \theta = \frac{z - z^{-1}}{2i}$, $d\theta = \frac{dz}{iz}$. Alors $3 + 2 \sin \theta = 3 - i(z - z^{-1})$ et l'intégrale devient $\oint_{|z|=1} \frac{dz}{z^2 + 3iz - 1}$. (1 pt)

Le discriminant de $z^2 + 3iz - 1$ est $(3i)^2 + 4 = -5$, les racines sont $z_{\pm} = \frac{-3i \pm i\sqrt{5}}{2}$.

Leurs modules sont $\frac{3 - \sqrt{5}}{2} \approx 0,38 < 1$ pour z_+ et $\frac{3 + \sqrt{5}}{2} \approx 2,62 > 1$ pour z_- . Seul z_+ est dans le disque. (1 pt)

Résidu en z_+ : $\frac{1}{z_+ - z_-} = \frac{1}{i\sqrt{5}}$. Donc l'intégrale vaut $2\pi i \cdot \frac{1}{i\sqrt{5}} = \frac{2\pi}{\sqrt{5}}$. (1 pt)

6 Théorie et lacets

/ 2 pts

(a) Vrai : d'après le théorème de Riemann, la singularité est effaçable, donc f se prolonge holomorphiquement en a , et la limite est $f(a)$. (1 pt)

(b) Les pôles $\pm i$ sont à l'intérieur, d'indice 3 chacun. $\text{Res}(f, i) = \frac{i}{2i} = \frac{1}{2}$ et $\text{Res}(f, -i) = \frac{-i}{-2i} = \frac{1}{2}$. L'intégrale vaut $2\pi i (3 \cdot \frac{1}{2} + 3 \cdot \frac{1}{2}) = 6\pi i$. (1 pt)

Le livre de contrôles corrigés de maths Licence L3

Tout le programme en un seul PDF de 52 pages, à imprimer ou à garder sur ta tablette.

[Voir le livre](#)

Zyro te conseille la suite

Contrôles de maths

Singularités et théorème des résidus :
contrôle de maths Licence L3

Cours de maths

Singularités et théorème des résidus :
cours de maths Licence L3

QCM de maths

Singularités et théorème des résidus :
QCM de maths Licence L3

Contrôles de maths

Réduction des endomorphismes :
contrôle de maths Licence L3



Contrôles de maths

Groupes, anneaux et corps : contrôle de maths Licence L3



Cours de maths

Réduction des endomorphismes : cours de maths Licence L3

Zyro vous emmène sur nos sites partenaires

Embarquez pour d'autres planètes du savoir et leurs applis.

Décollage