

Réduction des endomorphismes : exercices de maths Maths Spé à télécharger en PDF



Le livre d'exercices corrigés de maths Maths Spé

Tout le programme en un seul PDF de 133 pages, à imprimer ou à garder sur ta tablette.

[Voir le livre](#)

21 exercices classés par difficulté (★ facile, ★★ moyen, ★★★ difficile). Cherche d'abord sans regarder le corrigé !

1 Spectre d'une matrice triangulaire

★ ★ ★

Soit $T = \begin{pmatrix} 3 & 5 & -1 \\ 0 & -2 & 4 \\ 0 & 0 & 7 \end{pmatrix}$.

- Donner χ_T et le spectre de T .
- T est-elle diagonalisable ? Justifier.
- Calculer $\text{tr}(T)$ et $\det(T)$ à partir du spectre.

2 Vecteurs propres ou non ?



Soit $A = \begin{pmatrix} 1 & 4 \\ 2 & 3 \end{pmatrix}$, $u_1 = (1, 1)$, $u_2 = (2, -1)$ et $u_3 = (1, 2)$.

- Lesquels de ces vecteurs sont des vecteurs propres de A ? Donner la valeur propre associée.
- En déduire une diagonalisation de A .

3 Polynôme caractéristique d'ordre 2



Soit $M = \begin{pmatrix} 2 & -3 \\ 1 & 6 \end{pmatrix}$. Calculer χ_M , déterminer ses valeurs propres puis une base de chaque sous-espace propre.

4 Vrai ou faux ?



Dire si chaque affirmation est vraie ou fausse, avec justification.

- Si 0 est valeur propre de A , alors A n'est pas inversible.
- Un vecteur propre peut être le vecteur nul.
- Si λ est valeur propre de A , alors λ^2 est valeur propre de A^2 .
- Toute matrice de $M_2(\mathbb{R})$ possède une valeur propre réelle.
- La somme de deux vecteurs propres est un vecteur propre.

5 Une projection



Soit $P = \begin{pmatrix} 2 & -2 \\ 1 & -1 \end{pmatrix}$.

- Vérifier que $P^2 = P$.
- En déduire que $\text{Sp}(P) \subset \{0, 1\}$.
- Déterminer E_0 et E_1 , puis conclure sur la diagonalisabilité.

6 Une symétrie et ses puissances



Soit $S = \begin{pmatrix} 3 & -4 \\ 2 & -3 \end{pmatrix}$.

- Calculer S^2 .
- En déduire les valeurs propres possibles, puis les sous-espaces propres.
- Calculer S^{2025} et S^{2026} .

7 Une matrice de rang 1



Soit J la matrice de $\mathcal{M}_3(\mathbb{R})$ dont tous les coefficients valent 1.

- Quel est son rang ? En déduire la dimension de E_0 .
- Montrer que $(1, 1, 1)$ est vecteur propre ; en déduire χ_J .
- J est-elle diagonalisable ?

8 Diagonaliser avec une valeur propre double



Soit $A = \begin{pmatrix} 3 & 5 & -5 \\ 0 & 3 & 0 \\ 0 & 5 & -2 \end{pmatrix}$. Déterminer χ_A , les sous-espaces propres, puis une matrice P inversible telle que $P^{-1}AP$ soit diagonale.

9 Une matrice non diagonalisable



Soit $M = \begin{pmatrix} 0 & 2 & 1 \\ -2 & 3 & 2 \\ -1 & 2 & 2 \end{pmatrix}$, de polynôme caractéristique $(X - 1)^2(X - 3)$. Montrer que M n'est pas diagonalisable, et déterminer les deux sous-espaces propres.

10 Deux populations de bactéries



Deux colonies de bactéries A et B évoluent chaque heure selon $a_{n+1} = 4a_n + 2b_n$ et $b_{n+1} = a_n + 3b_n$, avec $a_0 = 3$ et $b_0 = 0$ (en milliers d'individus).

- Écrire le système sous la forme $X_{n+1} = BX_n$ et diagonaliser B .
- Exprimer a_n et b_n en fonction de n .
- Que vaut a_n/b_n quand n devient grand ?

11 Un paramètre qui change tout



Pour $a \in \mathbb{R}$, soit $M(a) = \begin{pmatrix} 1 & 0 & a \\ 0 & 2 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$. Pour quelles valeurs de a la matrice $M(a)$ est-elle diagonalisable ?

12 Droites stables



Soit $B = \begin{pmatrix} 3 & -2 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}$ et u l'endomorphisme de $\mathbb{R}^2$ associé.

- Déterminer toutes les droites vectorielles stables par u .
- Décomposer $(3, 2)$ sur les vecteurs propres, puis calculer $B^n(3, 2)$.

13 Trace, déterminant et valeurs propres



Soit $A \in \mathcal{M}_3(\mathbb{R})$ avec $\text{tr}(A) = 9$ et $\det(A) = 24$, admettant 2 et 3 pour valeurs propres.

- Déterminer la troisième valeur propre. A est-elle diagonalisable ?
- Écrire χ_A , puis calculer $\text{tr}(A^2)$ et $\det(A + I)$.

14 Un polynôme annulateur



Soit $A \in \mathcal{M}_n(\mathbb{R})$ vérifiant $A^3 - 3A^2 + 2A = 0$.

- Que peut-on dire du spectre de A ?
- Montrer que A est diagonalisable.
- On suppose A inversible. Montrer que $A^2 - 3A + 2I = 0$ et exprimer A^{-1} en fonction de A .

15 Inverse par Cayley-Hamilton



Soit $A = \begin{pmatrix} 1 & -4 & 4 \\ -1 & 1 & 1 \\ -1 & -4 & 6 \end{pmatrix}$. On admet que $\chi_A(X) = X^3 - 8X^2 + 17X - 10$.

- Factoriser χ_A et justifier que A est diagonalisable.
- Calculer A^2 , puis exprimer A^{-1} comme combinaison de A^2 , A et I . Donner A^{-1} .

16 Noyaux et dimension paire



Soit E un $\mathbb{R}$ -espace vectoriel de dimension finie et $u \in \mathcal{L}(E)$ tel que $u^3 - u^2 + u - \text{id} = 0$.

- Factoriser $X^3 - X^2 + X - 1$ et montrer que $E = \ker(u - \text{id}) \oplus \ker(u^2 + \text{id})$.
- Montrer que $\dim \ker(u^2 + \text{id})$ est paire.

17 Le commutant d'un endomorphisme



Soit $A \in \mathcal{M}_3(\mathbb{R})$ ayant trois valeurs propres distinctes $\lambda_1, \lambda_2, \lambda_3$, et B une matrice qui commute avec A .

- Montrer que chaque $E_{\lambda_i}(A)$ est stable par B .
- En déduire que B est diagonale dans une base de vecteurs propres de A .
- Montrer que B est un polynôme en A de degré au plus 2. Quelle est la dimension de l'ensemble des matrices qui commutent avec A ?

18 Nilpotence et puissances



Soit $N = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$.

- Calculer N^2 et N^3 . En déduire le spectre de N .
- N est-elle diagonalisable ? Est-elle trigonalisable ?
- Calculer $(I + N)^{10}$ et $(I + N)^{-1}$.

19 Trigonalisation explicite



Soit $M = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 \\ -1 & 2 & 0 \\ -1 & -1 & 3 \end{pmatrix}$, de polynôme caractéristique $(X - 1)^2(X - 3)$.

- Montrer que M n'est pas diagonalisable.

- Trouver une base (v_1, v_2, v_3) dans laquelle la matrice de M est $T = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 3 \end{pmatrix}$.

20 Une suite récurrente à racine double

★★★★

On définit $u_0 = 1$, $u_1 = 3$ et $u_{n+2} = 4u_{n+1} - 4u_n$. Soit $C = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ -4 & 4 \end{pmatrix}$, de sorte que $\begin{pmatrix} u_{n+1} \\ u_{n+2} \end{pmatrix} = C \begin{pmatrix} u_n \\ u_{n+1} \end{pmatrix}$.

- Calculer χ_C . C est-elle diagonalisable ?
- Poser $N = C - 2I$, calculer N^2 , et en déduire C^n .
- Donner u_n en fonction de n .

21 Matrice par blocs et sous-espace stable

★★★★

Soit $M = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 5 & 1 \\ 0 & 3 & 0 & 2 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & -2 & 3 \end{pmatrix}$ et u l'endomorphisme de $\mathbb{R}^4$ associé. Soit $F = \text{Vect}(e_1, e_2)$.

- Montrer que F est stable par u et donner la matrice de u_F .
- Calculer χ_M à l'aide des blocs. Quel est le spectre ?
- Montrer que $\dim E_1 = 1$ et conclure sur la diagonalisabilité de M .

Le livre d'exercices corrigés de maths Maths Spé

Tout le programme en un seul PDF de 133 pages, à imprimer ou à garder sur ta tablette.

Voir le livre

 **Zyro te conseille la suite**

 Exercices corrigés de maths

Réduction des endomorphismes :
exercices corrigés de maths Maths Spé

 Cours de maths

Réduction des endomorphismes : cours
de maths Maths Spé

 QCM de maths

Réduction des endomorphismes : QCM
de maths Maths Spé

 Exercices corrigés de maths

Espaces euclidiens : exercices corrigés de
maths Maths Spé

 Exercices corrigés de maths

Séries numériques : exercices corrigés de
maths Maths Spé

 Cours de maths

Espaces euclidiens : cours de maths
Maths Spé

Zyro vous emmène sur nos sites partenaires

Embarquez pour d'autres planètes du savoir et leurs applis.

Décollage