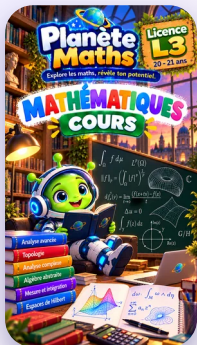


Réduction des endomorphismes : cours de maths Licence L3 à télécharger en PDF



Le livre de cours de maths Licence L3

Tout le programme en un seul PDF de 101 pages, à imprimer ou à garder sur ta tablette.

[Voir le livre](#)

Réduire un endomorphisme, c'est trouver une base dans laquelle sa matrice est la plus simple possible : diagonale quand c'est réalisable, triangulaire ou « presque diagonale » (blocs de Jordan) sinon. Les outils de ce chapitre sont les polynômes annulateurs : ils transforment un problème de matrices en un problème d'arithmétique des polynômes. Dans tout le chapitre, $\mathbb{K}$ désigne $\mathbb{R}$ ou $\mathbb{C}$, E est un $\mathbb{K}$ -espace vectoriel de dimension finie n et u un endomorphisme de E .

1. Polynômes d'endomorphisme

Pour $P = a_0 + a_1X + \dots + a_dX^d$ dans $\mathbb{K}[X]$, on pose $P(u) = a_0 \text{Id} + a_1u + \dots + a_du^d$. L'application $P \mapsto P(u)$ est un morphisme d'algèbres : $(PQ)(u) = P(u) \circ Q(u)$. En particulier, deux polynômes en u commutent toujours.

D Polynôme annulateur

Un polynôme P est dit annulateur de u si $P(u) = 0$. L'ensemble des polynômes annulateurs de u est un idéal de $\mathbb{K}[X]$, non réduit à $\{0\}$.

Il est non nul pour une raison de dimension : $\mathcal{L}(E)$ est de dimension n^2 , donc les $n^2 + 1$ endomorphismes $\text{Id}, u, \dots, u^{n^2}$ forment une famille liée.

E Exemple 1

Soit $A = \begin{pmatrix} 2 & 1 \\ 0 & 3 \end{pmatrix}$. On calcule $A^2 = \begin{pmatrix} 4 & 5 \\ 0 & 9 \end{pmatrix}$, puis
 $A^2 - 5A + 6I = \begin{pmatrix} 4 - 10 + 6 & 5 - 5 \\ 0 & 9 - 15 + 6 \end{pmatrix} = 0$. Le polynôme
 $X^2 - 5X + 6 = (X - 2)(X - 3)$ annule A .

2. Polynôme minimal

D Polynôme minimal

L'idéal des polynômes annulateurs de u est engendré par un unique polynôme unitaire, noté μ_u : c'est le **polynôme minimal** de u . Un polynôme P annule u si et seulement si μ_u divise P .

P**Racines du polynôme minimal**

Les racines de μ_u dans $\mathbb{K}$ sont exactement les valeurs propres de u . Plus précisément, μ_u et le polynôme caractéristique χ_u ont les mêmes facteurs irréductibles.

Idée de la preuve : si $u(x) = \lambda x$ avec $x \neq 0$, alors $P(u)(x) = P(\lambda)x$, donc $P(\lambda) = 0$ pour tout annulateur P . Réciproquement, si λ est racine de $\mu_u = (X - \lambda)Q$, alors $Q(u) \neq 0$ par minimalité, et tout vecteur de l'image de $Q(u)$ est propre pour λ .

E**Exemple 2**

Soit $C = \begin{pmatrix} 1 & -1 \\ 1 & 3 \end{pmatrix}$. On a $C \neq \lambda I$, donc $\deg \mu_C \geq 2$. Or $C - 2I = \begin{pmatrix} -1 & -1 \\ 1 & 1 \end{pmatrix}$ vérifie $(C - 2I)^2 = 0$. Ainsi $\mu_C = (X - 2)^2$, et $\chi_C = X^2 - 4X + 4 = (X - 2)^2$: ici $\mu_C = \chi_C$.

⚠**Attention**

Le polynôme minimal peut être strictement plus petit que le polynôme caractéristique : pour l'identité de $\mathbb{K}^3$, $\mu = X - 1$ mais $\chi = (X - 1)^3$.

3. Le théorème de Cayley-Hamilton

P Théorème de Cayley-Hamilton

Le polynôme caractéristique de u est annulateur : $\chi_u(u) = 0$. Par conséquent μ_u divise χ_u et $\deg \mu_u \leq n$.

Idée de la preuve : si A est la matrice de u et $B(X)$ la transposée de la comatrice de $XI - A$, alors $(XI - A)B(X) = \chi_u(X)I$ dans $\mathcal{M}_n(\mathbb{K}[X])$. En écrivant $B(X) = \sum B_k X^k$, on compare les coefficients, on multiplie la relation de rang k par A^k et on somme : tout se télescope et il reste $\chi_u(A) = 0$.

E Exemple 3

Pour $A = \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 3 & 4 \end{pmatrix}$, on a $\chi_A = X^2 - 5X - 2$ (trace 5, déterminant -2). Donc $A^2 - 5A - 2I = 0$, soit $A(A - 5I) = 2I$ et

$$A^{-1} = \frac{1}{2}(A - 5I) = \begin{pmatrix} -2 & 1 \\ \frac{3}{2} & -\frac{1}{2} \end{pmatrix}.$$

On vérifie $AA^{-1} = I$: l'inverse s'obtient sans pivot de Gauss.

4. Le lemme des noyaux

P

Lemme des noyaux

Soient $P_1, \dots, P_r$ des polynômes deux à deux premiers entre eux et $P = P_1 \cdots P_r$.

Alors

$$\ker P(u) = \ker P_1(u) \oplus \cdots \oplus \ker P_r(u).$$

De plus, les projecteurs associés sont des polynômes en u .

Preuve pour $r = 2$: une relation de Bézout $UP_1 + VP_2 = 1$ donne

$x = (VP_2)(u)(x) + (UP_1)(u)(x)$ pour tout x . Si $x \in \ker P(u)$, le premier terme est dans $\ker P_1(u)$ car $P_1VP_2 = VP$, et le second dans $\ker P_2(u)$. La somme est directe car un vecteur de $\ker P_1(u) \cap \ker P_2(u)$ est annulé par $UP_1 + VP_2 = 1$, donc nul.

E

Exemple 4

Soit $A = \begin{pmatrix} 3 & -2 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}$. On a $A^2 - 3A + 2I = 0$, donc $P = (X - 1)(X - 2)$ annule A et $\mathbb{K}^2 = \ker(A - I) \oplus \ker(A - 2I)$. Avec $P_1 = X - 1$, $P_2 = X - 2$ et la relation $(X - 1) - (X - 2) = 1$, le projecteur sur $\ker(A - I)$ est $-(A - 2I) = \begin{pmatrix} -1 & 2 \\ -1 & 2 \end{pmatrix}$. Appliqué à $(3, 2)$, il donne $(1, 1)$; l'autre composante est $(A - I)(3, 2) = (2, 1)$, et $(3, 2) = (1, 1) + (2, 1)$.

5. Diagonalisation

P

Critères de diagonalisabilité

Les propriétés suivantes sont équivalentes :

- u est diagonalisable ;
- u admet un polynôme annulateur scindé à racines simples dans $\mathbb{K}$;
- μ_u est scindé à racines simples ;
- χ_u est scindé et, pour chaque valeur propre λ , $\dim E_\lambda = m_\lambda$ (multiplicité de λ dans χ_u).

Le lemme des noyaux explique l'équivalence : si $P = (X - \lambda_1) \cdots (X - \lambda_r)$ annule u avec des λ_i distincts, alors $E = \ker P(u) = \bigoplus \ker(u - \lambda_i \text{Id})$ est somme directe d'espaces propres. Une condition **suffisante** classique : χ_u scindé à racines simples (n valeurs propres distinctes), mais elle n'est pas nécessaire.

M

Méthode

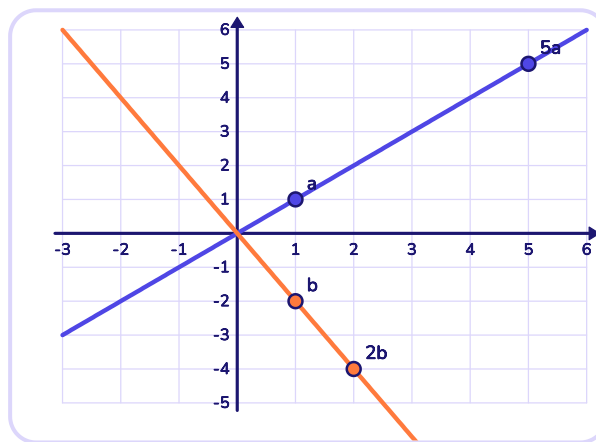
1. Calculer χ_A et le factoriser dans $\mathbb{K}$; s'il n'est pas scindé, arrêter.
2. Pour chaque valeur propre multiple, calculer $\dim \ker(A - \lambda I) = n - \text{rg}(A - \lambda I)$.
3. Conclure en comparant avec la multiplicité, ou chercher un annulateur à racines simples.

E

Exemple 5

Soit $A = \begin{pmatrix} 4 & 1 \\ 2 & 3 \end{pmatrix}$. Trace **7** et déterminant **10** :

$\chi_A = X^2 - 7X + 10 = (X - 2)(X - 5)$. Pour **5** : $A - 5I = \begin{pmatrix} -1 & 1 \\ 2 & -2 \end{pmatrix}$, vecteur $a = (1, 1)$. Pour **2** : $A - 2I = \begin{pmatrix} 2 & 1 \\ 2 & 1 \end{pmatrix}$, vecteur $b = (1, -2)$. Avec $P = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 1 & -2 \end{pmatrix}$, on obtient $P^{-1}AP = \text{diag}(5, 2)$.



La figure montre ce que fait A : le vecteur a de la droite propre $y = x$ est dilaté d'un facteur **5**, le vecteur b de la droite $y = -2x$ d'un facteur **2**. Tout vecteur se décompose sur a et b , d'où le calcul des puissances $A^k = P \text{diag}(5^k, 2^k) P^{-1}$.



Astuce de Zyro

Si tu trouves un polynôme annulateur avec une racine double, ne conclus pas trop vite : ce n'est pas un obstacle, il faut juste vérifier que le polynôme minimal, lui, n'a pas de racine double.

6. Trigonalisation

P Trigonalisabilité

L'endomorphisme u est trigonalisable (il existe une base où sa matrice est triangulaire supérieure) si et seulement si χ_u est scindé dans $\mathbb{K}$, si et seulement si μ_u est scindé. Sur $\mathbb{C}$, tout endomorphisme est trigonalisable.

Preuve par récurrence sur n : χ_u scindé fournit un vecteur propre e_1 ; l'endomorphisme induit sur $E/\text{Vect}(e_1)$ a un polynôme caractéristique qui divise celui de u , donc scindé, et l'hypothèse de récurrence donne le reste de la base. Les coefficients diagonaux sont alors les valeurs propres, répétées selon leur multiplicité.

E Exemple 6

Reprenons $C = \begin{pmatrix} 1 & -1 \\ 1 & 3 \end{pmatrix}$, non diagonalisable. Le noyau de $C - 2I$ est la droite engendrée par $u_1 = (1, -1)$. On complète par $u_2 = (1, 0)$:

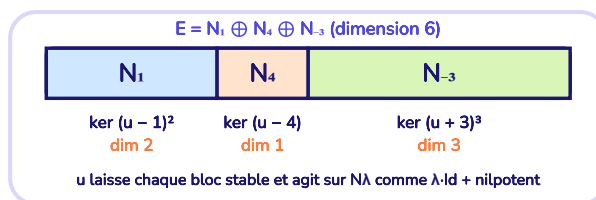
$Cu_2 = (1, 1) = -u_1 + 2u_2$. Avec $P = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ -1 & 0 \end{pmatrix}$,

$$P^{-1}CP = \begin{pmatrix} 2 & -1 \\ 0 & 2 \end{pmatrix}.$$

7. Sous-espaces caractéristiques et décomposition de Dunford

D Sous-espace caractéristique

Si $\chi_u = \prod (X - \lambda_i)^{m_i}$ est scindé, le sous-espace caractéristique associé à λ_i est $N_i = \ker(u - \lambda_i \text{Id})^{m_i}$. On a $E = N_1 \oplus \cdots \oplus N_r$, chaque N_i est stable par u et $\dim N_i = m_i$.



La décomposition vient du lemme des noyaux appliqué à $\chi_u = \prod (X - \lambda_i)^{m_i}$, annulateur d'après Cayley-Hamilton. Sur N_i , l'endomorphisme $u - \lambda_i \text{Id}$ est nilpotent : c'est le point de départ de la décomposition suivante.

P Décomposition de Dunford

Si χ_u est scindé, il existe un unique couple (d, n) d'endomorphismes, avec d diagonalisable, n nilpotent, $dn = nd$ et $u = d + n$. De plus d et n sont des polynômes en u .

Construction : si p_i est le projecteur sur N_i parallèlement aux autres, on pose $d = \sum \lambda_i p_i$ et $n = u - d$. Unicité : d' et n' commutent avec u , donc avec d et n qui sont des polynômes en u ; alors $d - d' = n' - n$ est à la fois diagonalisable et nilpotent, donc nul.

E Exemple 7

Soit $M = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 0 \\ -1 & 3 & 0 \\ -1 & 4 & -1 \end{pmatrix}$. On trouve $\chi_M = (X - 2)^2(X + 1)$. Le projecteur sur

$N_{-1} = \ker(M + I)$ est $\pi = \frac{1}{9}(M - 2I)^2 = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 1 \end{pmatrix}$. Donc

$$D = 2I - 3\pi = \begin{pmatrix} 2 & 0 & 0 \\ 0 & 2 & 0 \\ 0 & 3 & -1 \end{pmatrix}, \quad N = M - D = \begin{pmatrix} -1 & 1 & 0 \\ -1 & 1 & 0 \\ -1 & 1 & 0 \end{pmatrix},$$

avec $N^2 = 0$ et $DN = ND$.

Application aux puissances : si $u = d + n$ avec $n^p = 0$, la formule du binôme (valable car d et n commutent) donne $u^k = \sum_{j=0}^{p-1} \binom{k}{j} d^{k-j} n^j$, somme de p termes seulement.

8. Réduction de Jordan

D Bloc de Jordan

Le bloc de Jordan $J_k(\lambda)$ est la matrice carrée d'ordre k ayant λ sur la diagonale, des 1 juste au-dessus de la diagonale et des 0 ailleurs.

P Théorème de Jordan

Si χ_u est scindé, il existe une base de E dans laquelle la matrice de u est diagonale par blocs, chaque bloc étant un bloc de Jordan $J_k(\lambda)$. Cette écriture est unique à l'ordre des blocs près.

2	1	0			
0	2	1			
0	0	2			
			2	1	
			0	2	
					5

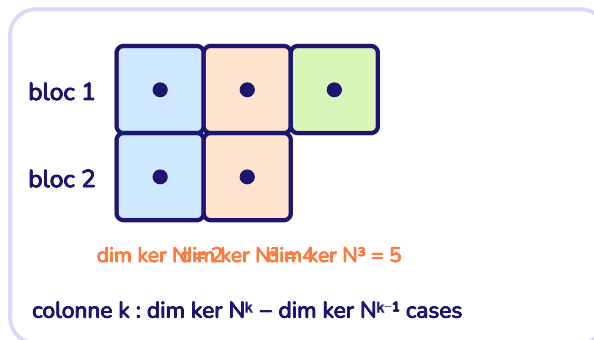
$$J_3(2) \oplus J_2(2) \oplus J_1(5)$$

Les invariants se lisent sur la matrice de Jordan, par exemple celle de la figure :

- la multiplicité m_λ est la somme des tailles des blocs de valeur λ (ici $m_2 = 3 + 2 = 5$) ;
- $\dim E_\lambda$ est le nombre de blocs de valeur λ (ici $\dim E_2 = 2$) ;

- l'exposant de $X - \lambda$ dans μ_u est la taille du plus grand bloc (ici $\mu_u = (X - 2)^3(X - 5)$).

Pour reconstituer les blocs d'un nilpotent N , on utilise la suite des noyaux : le nombre de blocs de taille au moins k vaut $\dim \ker N^k - \dim \ker N^{k-1}$.



E Exemple 8

Soit $G = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 1 \\ 1 & -1 & 2 \end{pmatrix}$. Alors $\chi_G = (X - 1)^3$ et $N = G - I$ vérifie

$N^2 = \begin{pmatrix} 1 & -1 & 1 \\ 1 & -1 & 1 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} \neq 0$ et $N^3 = 0$. Donc $\mu_G = (X - 1)^3$: un seul bloc de taille 3

. Avec $v = e_1$, la chaîne $N^2v = (1, 1, 0)$, $Nv = (-1, 0, 1)$, $v = (1, 0, 0)$ forme une base où la matrice de G est $J_3(1) = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$.



Attention

Le polynôme caractéristique et le polynôme minimal ne suffisent à déterminer la forme de Jordan qu'en dimension au plus 3. En dimension 4, les nilpotents $J_2(0) \oplus J_2(0)$ et $J_2(0) \oplus J_1(0) \oplus J_1(0)$ ont même $\chi = X^4$ et même $\mu = X^2$ sans être semblables ; il faut les dimensions des noyaux.

À retenir

- μ_u engendre l'idéal des annulateurs ; ses racines sont les valeurs propres ; μ_u divise χ_u (Cayley-Hamilton).
- Lemme des noyaux : des facteurs premiers entre eux découpent $\ker P(u)$ en somme directe, avec des projecteurs polynomiaux.
- u diagonalisable $\iff \mu_u$ scindé à racines simples $\iff$ annulateur scindé à racines simples.
- u trigonalisable $\iff \chi_u$ scindé ; c'est toujours vrai sur $\mathbb{C}$.
- $E = \bigoplus \ker(u - \lambda_i)^{m_i}$; Dunford : $u = d + n$, unique, d et n polynômes en u .
- Jordan : nombre de blocs = $\dim E_\lambda$, plus grand bloc = exposant dans μ_u , somme des tailles = m_λ .

Le livre de cours de maths Licence L3

Tout le programme en un seul PDF de 101 pages, à imprimer ou à garder sur ta tablette.

Voir le livre

  **Zyro te conseille la suite**

 Exercices de maths

Réduction des endomorphismes :
exercices de maths Licence L3

 Contrôles de maths

Réduction des endomorphismes :
contrôle de maths Licence L3

 QCM de maths

Réduction des endomorphismes : QCM
de maths Licence L3

 Exercices de maths

Groupes, anneaux et corps : exercices de
maths Licence L3

 Exercices de maths

Topologie des espaces métriques :
exercices de maths Licence L3

 Contrôles de maths

Groupes, anneaux et corps : contrôle de
maths Licence L3

Zyro vous emmène sur nos sites partenaires

Embarquez pour d'autres planètes du savoir et leurs applis.

Décollage