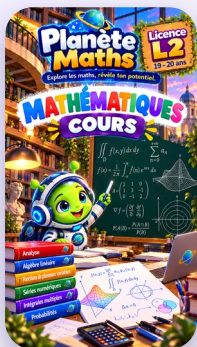


Réduction des endomorphismes : cours de maths Licence L2 à télécharger en PDF



Le livre de cours de maths Licence L2

Tout le programme en un seul PDF de 100 pages, à imprimer ou à garder sur ta tablette.

[Voir le livre](#)

Une matrice carrée cache souvent sa vraie nature : ses coefficients mélangent toutes les coordonnées. **Réduire** un endomorphisme, c'est choisir une base dans laquelle sa matrice devient aussi simple que possible, diagonale quand c'est réalisable, triangulaire sinon. Cette simplification donne accès aux puissances de matrices, aux suites récurrentes et aux systèmes dynamiques. Dans tout le chapitre, $\mathbb{K}$ désigne $\mathbb{R}$ ou $\mathbb{C}$ et E un $\mathbb{K}$ -espace vectoriel de dimension finie n .

1. Matrices semblables et enjeu de la réduction

D Matrices semblables

Deux matrices A et B de $\mathcal{M}_n(\mathbb{K})$ sont **semblables** s'il existe une matrice inversible P telle que $B = P^{-1}AP$. Elles représentent alors le même endomorphisme dans deux bases différentes, P étant la matrice de passage.

La similitude conserve la trace, le déterminant, le rang et le polynôme caractéristique défini plus loin. **Réduire** A , c'est trouver P telle que $P^{-1}AP$ soit diagonale ou triangulaire. Si $A = PDP^{-1}$, alors $A^k = PD^kP^{-1}$ pour tout entier k , et élever une matrice diagonale à la puissance k consiste simplement à élever ses coefficients diagonaux.

2. Valeurs propres, vecteurs propres, sous-espaces propres

D Valeur propre et vecteur propre

Soit f un endomorphisme de E . Un scalaire $\lambda \in \mathbb{K}$ est une **valeur propre** de f s'il existe un vecteur $v \neq 0$ tel que $f(v) = \lambda v$. Un tel vecteur v est un **vecteur propre** associé à λ . Le **sous-espace propre** est $E_\lambda = \ker(f - \lambda \text{id})$ et le **spectre** est l'ensemble des valeurs propres.

P Propriétés fondamentales

Un scalaire λ est valeur propre si et seulement si $f - \lambda \text{id}$ n'est pas injectif, c'est-à-dire $\det(A - \lambda I) = 0$. Des vecteurs propres associés à des valeurs propres **deux à deux distinctes** forment une famille libre, et les sous-espaces propres sont en somme directe. En particulier, 0 est valeur propre si et seulement si A n'est pas inversible.

E Exemple 1

Soit $A = \begin{pmatrix} 4 & 1 \\ 2 & 3 \end{pmatrix}$. Pour $v = (1, 1)$: $Av = (5, 5) = 5v$, donc **5** est valeur propre.

Pour $w = (1, -2)$: $Aw = (4 - 2, 2 - 6) = (2, -4) = 2w$, donc **2** est valeur propre.

Les vecteurs v et w ne sont pas colinéaires, ils forment donc une base de $\mathbb{R}^2$ formée de vecteurs propres.

3. Le polynôme caractéristique

D Polynôme caractéristique

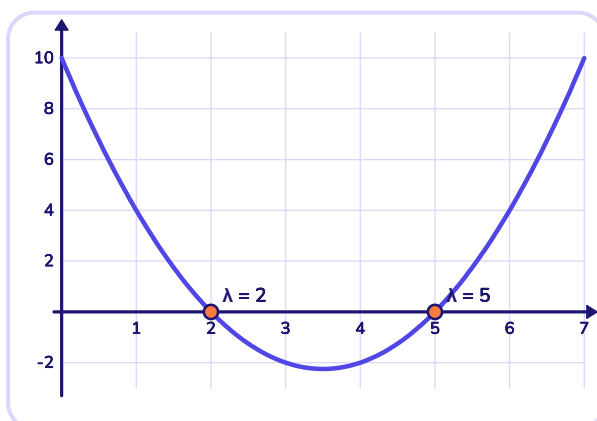
Pour $A \in \mathcal{M}_n(\mathbb{K})$, on pose $\chi_A(x) = \det(xI - A)$. C'est un polynôme **unitaire de degré n** , de la forme $x^n - \operatorname{tr}(A)x^{n-1} + \dots + (-1)^n \det(A)$. Pour $n = 2$:
 $\chi_A(x) = x^2 - \operatorname{tr}(A)x + \det(A)$.

P Racines et multiplicités

Les valeurs propres de A sont exactement les racines de χ_A dans $\mathbb{K}$. Si λ est racine de multiplicité m_λ (multiplicité algébrique), alors $1 \leq \dim E_\lambda \leq m_\lambda$. Deux matrices semblables ont le même polynôme caractéristique, et celui d'une matrice triangulaire est le produit des $(x - a_{ii})$.

E Exemple 2

Pour la matrice A de l'exemple 1 : $\operatorname{tr}(A) = 7$ et $\det(A) = 10$, donc
 $\chi_A(x) = x^2 - 7x + 10 = (x - 2)(x - 5)$. Pour $\lambda = 2$, le système $(A - 2I)X = 0$ se réduit à $2x + y = 0$, d'où $E_2 = \operatorname{Vect}((1, -2))$. Pour $\lambda = 5$: $-x + y = 0$, d'où $E_5 = \operatorname{Vect}((1, 1))$.



4. Diagonalisation

D Endomorphisme diagonalisable

Un endomorphisme f est **diagonalisable** s'il existe une base de E formée de vecteurs propres de f . Matriciellement, $A = PDP^{-1}$ avec D diagonale ; les colonnes de P sont les vecteurs propres et la diagonale de D contient les valeurs propres associées.

P Caractérisation

Les assertions suivantes sont équivalentes : (i) f est diagonalisable ; (ii) $E = \bigoplus_{\lambda} E_{\lambda}$; (iii) χ_f est scindé sur $\mathbb{K}$ et $\dim E_{\lambda} = m_{\lambda}$ pour toute valeur propre λ . Condition suffisante : si χ_f possède n racines **distinctes** dans $\mathbb{K}$, alors f est diagonalisable.

M Méthode : diagonaliser une matrice

1. Calculer χ_A et le factoriser ; si le polynôme n'est pas scindé sur $\mathbb{K}$, on s'arrête.
2. Pour chaque valeur propre λ , résoudre $(A - \lambda I)X = 0$ et déterminer une base de E_{λ} .
3. Comparer $\dim E_{\lambda}$ et m_{λ} ; une seule inégalité stricte interdit la diagonalisation.
4. Assembler les bases dans P , écrire D et vérifier $AP = PD$.

E

Exemple 3

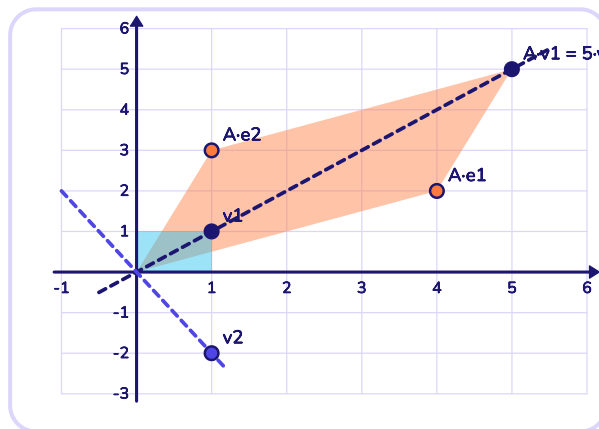
Soit $B = \begin{pmatrix} 3 & 1 & 1 \\ 0 & 2 & 0 \\ 1 & 1 & 3 \end{pmatrix}$. En développant selon la deuxième ligne,

$\chi_B(x) = (x-2)((x-3)^2 - 1) = (x-2)^2(x-4)$. Pour $\lambda = 4$, on trouve

$E_4 = \text{Vect}((1, 0, 1))$. Pour $\lambda = 2$, la matrice $B - 2I$ est de rang 1, donc

$\dim E_2 = 2$, avec la base $((-1, 1, 0), (-1, 0, 1))$. Comme $\dim E_2 = 2 = m_2$, B est

diagonalisable : $P = \begin{pmatrix} 1 & -1 & -1 \\ 0 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 1 \end{pmatrix}$ et $D = \text{diag}(4, 2, 2)$.



La figure illustre l'exemple 1 : la matrice A transforme le carré unité en un parallélogramme, mais le long des directions propres $(1, 1)$ et $(1, -2)$ elle agit par une simple dilatation de rapport 5 ou 2.

Matrice	Polynôme caractéristique	Dimensions des E_λ	Diagonalisable sur $\mathbb{R}$?
A	$(x-2)(x-5)$	1 et 1	oui
B	$(x-2)^2(x-4)$	2 et 1	oui
$C = \begin{pmatrix} 3 & 1 \\ -1 & 1 \end{pmatrix}$	$(x-2)^2$	1	non



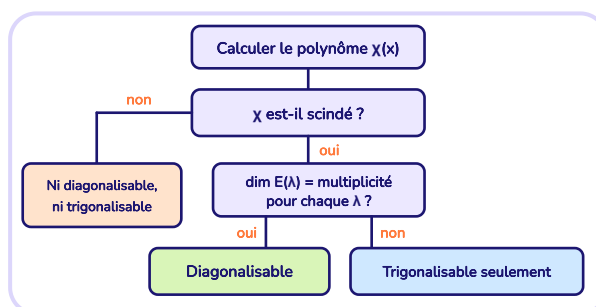
Astuce de Zyro

Avant de chercher des vecteurs propres, mieux vaut regarder la trace et le déterminant : la somme des valeurs propres comptées avec leur multiplicité vaut la trace et leur produit vaut le déterminant. C'est un excellent contrôle du polynôme caractéristique obtenu.



Erreurs classiques

Inversible n'entraîne pas diagonalisable : la matrice C ci-dessus est inversible et ne se diagonalise pas. Une matrice avec une valeur propre double n'est pas forcément non diagonalisable : B en est la preuve. Enfin, une matrice réelle peut avoir des valeurs propres complexes sans valeur propre réelle.



5. Trigonalisation



Théorème de trigonalisation

Une matrice $A \in \mathcal{M}_n(\mathbb{K})$ est trigonalisable (semblable à une matrice triangulaire supérieure) si et seulement si χ_A est scindé sur $\mathbb{K}$. Sur $\mathbb{C}$, toute matrice est donc trigonalisable. Les termes diagonaux de la matrice triangulaire sont les valeurs propres, répétées selon leur multiplicité.

M

Méthode

On prend un vecteur propre u comme premier vecteur de la base, on le complète par des vecteurs $v_2, \dots, v_n$ quelconques, puis on écrit la matrice de f dans cette base : la première colonne est $(\lambda, 0, \dots, 0)$. On recommence sur le bloc restant.

E

Exemple 4

Pour $C = \begin{pmatrix} 3 & 1 \\ -1 & 1 \end{pmatrix}$, on a $\chi_C(x) = x^2 - 4x + 4 = (x - 2)^2$ et $C - 2I$ est de rang 1, donc $E_2 = \text{Vect}(u)$ avec $u = (1, -1)$: C n'est pas diagonalisable. On complète par $v = (0, 1)$: $Cu = 2u$ et $Cv = (1, 1) = u + 2v$. Dans la base (u, v) , la matrice de C est $T = \begin{pmatrix} 2 & 1 \\ 0 & 2 \end{pmatrix}$, avec $P = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ -1 & 1 \end{pmatrix}$ et $C = PTP^{-1}$.

6. Polynômes annulateurs et théorème de Cayley-Hamilton

D

Polynôme annulateur

Un polynôme $Q \in \mathbb{K}[x]$ est un **polynôme annulateur** de A si $Q(A) = 0$ (matrice nulle). Le **polynôme minimal** μ_A est le polynôme annulateur unitaire de plus petit degré ; il divise tout polynôme annulateur et possède les mêmes racines que χ_A .

P

Théorème de Cayley-Hamilton

Toute matrice est annulée par son polynôme caractéristique : $\chi_A(A) = 0$. Par conséquent, μ_A divise χ_A .

P

Critère de diagonalisation

A est diagonalisable sur $\mathbb{K}$ si et seulement si elle est annulée par un polynôme **scindé à racines simples**, c'est-à-dire si μ_A est scindé à racines simples.

E

Exemple 5

Pour A de l'exemple 1, Cayley-Hamilton donne $A^2 - 7A + 10I = 0$. On en tire $A(7I - A) = 10I$, donc A est inversible et $A^{-1} = \frac{1}{10}(7I - A) = \frac{1}{10} \begin{pmatrix} 3 & -1 \\ -2 & 4 \end{pmatrix}$.

Le polynôme $(x - 2)(x - 5)$ est annulateur et à racines simples, ce qui confirme la diagonalisabilité de A .

⚠

Piège

Remplacer naïvement x par A dans $\det(xI - A)$ ne démontre rien : le résultat de **det** serait un scalaire et non une matrice. Le théorème est un énoncé à retenir, pas une substitution.

7. Applications aux suites récurrentes

Une suite définie par $u_{n+2} = a u_{n+1} + b u_n$ s'écrit sous forme matricielle $X_{n+1} = C X_n$ avec $X_n = (u_n, u_{n+1})^T$ et $C = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ b & a \end{pmatrix}$, matrice dite compagne. Son polynôme caractéristique $x^2 - ax - b$ est l'équation caractéristique de la suite. Si C est diagonalisable avec valeurs propres $\lambda_1 \neq \lambda_2$, alors $u_n = \alpha \lambda_1^n + \beta \lambda_2^n$. Dans le cas d'une racine double λ , la matrice est trigonalisable et $u_n = (\alpha + \beta n) \lambda^n$.

E**Exemple 6**

Soit $u_0 = 2$, $u_1 = 1$ et $u_{n+2} = u_{n+1} + 2u_n$. L'équation

$x^2 - x - 2 = (x - 2)(x + 1) = 0$ donne les valeurs propres **2** et **-1**, donc

$u_n = \alpha 2^n + \beta (-1)^n$. Les conditions initiales donnent $\alpha + \beta = 2$ et $2\alpha - \beta = 1$,

d'où $\alpha = \beta = 1$ et $u_n = 2^n + (-1)^n$. On vérifie : $u_5 = 32 - 1 = 31$, ce que le calcul de proche en proche (**2, 1, 5, 7, 17, 31**) confirme.

Réduction matrices Licence L2 : rapport de deux termes consécutifs de la suite 2 puissance n plus moins un puissance n, qui oscille puis converge vers la valeur propre dominante 2

La valeur propre de plus grand module gouverne le comportement à l'infini : ici u_{n+1}/u_n tend vers **2**, comme le montre le graphique.

À retenir

- λ est valeur propre de A si $Av = \lambda v$ avec $v \neq 0$; c'est une racine de $\chi_A(x) = \det(xI - A)$.
- $1 \leq \dim E_\lambda \leq m_\lambda$; la trace est la somme et le déterminant le produit des valeurs propres comptées avec multiplicité.
- Diagonalisable $\iff \chi_A$ scindé et $\dim E_\lambda = m_\lambda$ pour tout λ ; n valeurs propres distinctes suffisent.
- Trigonalisable sur $\mathbb{K}$ $\iff \chi_A$ scindé sur $\mathbb{K}$; toujours vrai sur $\mathbb{C}$.
- Cayley-Hamilton : $\chi_A(A) = 0$. Diagonalisable $\iff$ annulée par un polynôme scindé à racines simples.
- Si $A = PDP^{-1}$, alors $A^k = PD^kP^{-1}$: c'est la clé des suites récurrentes et des systèmes linéaires.

Le livre de cours de maths Licence L2

Tout le programme en un seul PDF de 100 pages, à imprimer ou à garder sur ta tablette.

Voir le livre



Entraîne-toi : défi express de Licence L2

Changer de niveau

Niveau : Licence L2

6 questions au hasard, correction tout de suite.



Lancer le défi



Zyro te conseille la suite



Exercices de maths

Réduction des endomorphismes :
exercices de maths Licence L2



Contrôles de maths

Réduction des endomorphismes :
contrôle de maths Licence L2



QCM de maths

Réduction des endomorphismes : QCM
de maths Licence L2



Exercices de maths

Espaces préhilbertiens et euclidiens :
exercices de maths Licence L2

 Exercices de maths

Suites et séries de fonctions : exercices
de maths Licence L2

 Contrôles de maths

Espaces préhilbertiens et euclidiens :
contrôle de maths Licence L2

Zyro vous emmène sur nos sites partenaires

Embarquez pour d'autres planètes du savoir et leurs applis.

Décollage