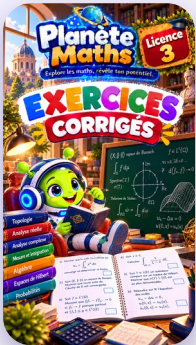


# Réduction des endomorphismes : exercices corrigés de maths Licence L3 à télécharger en PDF



## Le livre d'exercices corrigés de maths Licence L3

Tout le programme en un seul PDF de 126 pages, à imprimer ou à garder sur ta tablette.

[Voir le livre](#)

Corrigés rédigés des exercices du chapitre. Vérifie chaque étape, puis corrige-toi.

### 1 Un polynôme qui annule



a)  $A^2 = \begin{pmatrix} 4 & 5 \\ 0 & 9 \end{pmatrix}$ , donc  $P(A) = \begin{pmatrix} 4 & 5 \\ 0 & 9 \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} 10 & 5 \\ 0 & 15 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 6 & 0 \\ 0 & 6 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}$ .

b)  $P$  annule  $A$ , donc  $\mu_A$  divise  $P = (X - 2)(X - 3)$ . Les valeurs propres de la triangulaire  $A$  sont **2** et **3**, racines de  $\mu_A$  ; donc  $\mu_A = (X - 2)(X - 3) = X^2 - 5X + 6$ . Comme il est scindé à racines simples,  $A$  est diagonalisable.

## 2 Vrai ou faux ?



- a) Vrai.  $(D - 2I)(D - 5I) = 0$  pour  $D = \text{diag}(2, 2, 5)$ , et ni  $X - 2$  ni  $X - 5$  n'annule  $D$ .
- b) Faux. D'après Cayley-Hamilton,  $\mu$  divise  $\chi$  qui est de degré 3, donc  $\deg \mu \leq 3$ .
- c) Vrai. En dimension au plus 3,  $\chi$  et  $\mu$  déterminent les tailles des blocs de Jordan : par exemple pour  $\chi = (X - 1)^3$ ,  $\mu = (X - 1)^2$  impose les blocs 2 et 1 ;  $\mu = (X - 1)^3$  impose un bloc de taille 3 ;  $\mu = X - 1$  impose la diagonale.

## 3 Spectre d'une triangulaire



$T$  est triangulaire supérieure, donc  $\chi_T = (X - 1)(X - 3)(X - 1) = (X - 1)^2(X - 3)$ .  
Les valeurs propres sont 1 (multiplicité 2) et 3 (multiplicité 1).  
 $\chi_T$  est scindé sur  $\mathbb{R}$  ; la matrice  $T$  est déjà triangulaire, donc trigonalisable (c'est évident ici).

## 4 Trace et déterminant



- a)  $\chi_A = X^2 - 5X + 6 = (X - 2)(X - 3)$ . Deux valeurs propres distinctes :  $A$  est diagonalisable,  $\mu_A = \chi_A = (X - 2)(X - 3)$ .
- b)  $\chi_A = X^2 - 6X + 9 = (X - 3)^2$ . Alors  $\mu_A$  vaut  $X - 3$  ou  $(X - 3)^2$ .  $A$  est diagonalisable si et seulement si  $\mu_A = X - 3$ , c'est-à-dire  $A = 3I$ . Toute autre matrice de trace 6 et déterminant 9, comme  $\begin{pmatrix} 3 & 1 \\ 0 & 3 \end{pmatrix}$ , n'est pas diagonalisable.

## 5 Inverse par Cayley-Hamilton



Trace 3, déterminant  $2 - 1 = 1$ , donc  $\chi_A = X^2 - 3X + 1$ . D'après Cayley-Hamilton,  
 $A^2 - 3A + I = 0$  (vérification :  $A^2 = \begin{pmatrix} 5 & 3 \\ 3 & 2 \end{pmatrix}$ , et  $\begin{pmatrix} 5 & 3 \\ 3 & 2 \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} 6 & 3 \\ 3 & 3 \end{pmatrix} + I = 0$ ).  
Alors  $A(3I - A) = 3A - A^2 = I$ , donc  $A^{-1} = 3I - A = \begin{pmatrix} 1 & -1 \\ -1 & 2 \end{pmatrix}$ .

## 6 Un nilpotent d'ordre 3



$N^2 = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} \neq 0$  et  $N^3 = 0$ . Donc  $\mu_N = X^3$ ; par Cayley-Hamilton et car la seule valeur propre est 0,  $\chi_N = X^3$  aussi.

Comme  $(I + N)(I - N + N^2) = I + N^3 = I$ , on a

$$(I + N)^{-1} = I - N + N^2 = \begin{pmatrix} 1 & -1 & 1 \\ 0 & 1 & -1 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}.$$

## 7 Projecteurs et symétries



$p^2 = p$  donc  $\mu_p$  divise  $X^2 - X = X(X - 1)$ . Comme  $p \neq 0$  et  $p \neq \text{Id}$ , ni  $X$  ni  $X - 1$  n'annule  $p$  :  $\mu_p = X(X - 1)$ . Il est scindé à racines simples, donc  $p$  est diagonalisable avec  $E = \ker p \oplus \ker(p - \text{Id})$ .

De même  $\mu_s$  divise  $X^2 - 1 = (X - 1)(X + 1)$ , et  $s \neq \pm \text{Id}$  impose  $\mu_s = X^2 - 1$  :  $s$  est diagonalisable sur  $\mathbb{R}$ .

## 8 Diagonaliser et calculer les puissances



$\chi_A = X^2 - 7X + 10 = (X - 2)(X - 5)$ . Le vecteur  $(1, 1)$  est propre pour 5 ( $A(1, 1) = (5, 5)$ ) et  $(1, -2)$  pour 2 ( $A(1, -2) = (2, -4)$ ). Avec  $P = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 1 & -2 \end{pmatrix}$ ,  $P^{-1} = \frac{1}{3} \begin{pmatrix} 2 & 1 \\ 1 & -1 \end{pmatrix}$  et  $P^{-1}AP = \text{diag}(5, 2)$ .

$$\text{Donc } A^k = P \text{diag}(5^k, 2^k) P^{-1} = \frac{1}{3} \begin{pmatrix} 2 \cdot 5^k + 2^k & 5^k - 2^k \\ 2 \cdot 5^k - 2 \cdot 2^k & 5^k + 2 \cdot 2^k \end{pmatrix}.$$

$$\text{Pour } k = 4 : 5^4 = 625, 2^4 = 16, \text{ d'où } A^4 = \frac{1}{3} \begin{pmatrix} 1266 & 609 \\ 1218 & 657 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 422 & 203 \\ 406 & 219 \end{pmatrix}.$$

## 9 Une matrice non diagonalisable



$B$  est triangulaire :  $\chi_B = (X - 2)^2(X - 3)$ . On a  $B - 2I = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$  de rang 2, donc

$\dim \ker(B - 2I) = 1 \neq 2$  :  $B$  n'est pas diagonalisable.

Le polynôme  $(X - 2)(X - 3)$  n'annule pas  $B$  (le produit

$(B - 2I)(B - 3I) = \begin{pmatrix} 0 & 0 & -1 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$  est non nul), donc  $\mu_B = (X - 2)^2(X - 3)$ , qui a

une racine double.

## 10 Lemme des noyaux en pratique



a)  $A^2 = \begin{pmatrix} 7 & -6 \\ 3 & -2 \end{pmatrix}$ , puis  $A^2 - 3A + 2I = \begin{pmatrix} 7 - 9 + 2 & -6 + 6 \\ 3 - 3 & -2 + 0 + 2 \end{pmatrix} = 0$ .

b) Comme  $(X - 1) - (X - 2) = 1$ , le projecteur sur  $\ker(A - I)$  est

$p_1 = -(A - 2I) = \begin{pmatrix} -1 & 2 \\ -1 & 2 \end{pmatrix}$  et celui sur  $\ker(A - 2I)$  est  $p_2 = A - I = \begin{pmatrix} 2 & -2 \\ 1 & -1 \end{pmatrix}$ . On

a  $p_1x = (-3 + 4, -3 + 4) = (1, 1)$  et  $p_2x = (6 - 4, 3 - 2) = (2, 1)$ . Ainsi

$x = (1, 1) + (2, 1)$ , avec  $A(1, 1) = (1, 1)$  et  $A(2, 1) = (4, 2) = 2(2, 1)$ .

## 11 Trigonaliser une matrice 2x2



$\chi_C = X^2 - 4X + 4 = (X - 2)^2$  et  $C \neq 2I$ , donc  $C$  n'est pas diagonalisable (sinon

$C = 2I$ ). Le noyau de  $C - 2I = \begin{pmatrix} -1 & -1 \\ 1 & 1 \end{pmatrix}$  est engendré par  $u_1 = (1, -1)$ .

On prend  $u_2 = (1, 0)$ . Alors  $Cu_2 = (1, 1) = -u_1 + 2u_2$  et  $Cu_1 = 2u_1$ . Avec

$P = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ -1 & 0 \end{pmatrix}$ ,  $P^{-1}CP = \begin{pmatrix} 2 & -1 \\ 0 & 2 \end{pmatrix}$ .

## 12 Polynômes minimaux de deux matrices

★★★

Les deux ont  $\chi = (X - 1)^2(X - 2)$ . Pour  $F$ ,  $(F - I)(F - 2I) = 0$ , donc  $\mu_F = (X - 1)(X - 2)$ .

Pour  $E_1$  :  $(E_1 - I)(E_1 - 2I) = \begin{pmatrix} 0 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} \neq 0$ , donc  $\mu_{E_1} \neq (X - 1)(X - 2)$  ;

comme  $(E_1 - I)^2(E_1 - 2I) = 0$ , on a  $\mu_{E_1} = (X - 1)^2(X - 2)$ .

Les polynômes minimaux diffèrent, donc  $E_1$  et  $F$  ne sont pas semblables.

## 13 Dunford d'une matrice 2x2

★★★

La seule valeur propre est 2. On pose  $D = 2I$  (diagonale) et  $N = C - 2I = \begin{pmatrix} -1 & -1 \\ 1 & 1 \end{pmatrix}$ .

On a  $N^2 = 0$  et  $DN = ND$  car  $D$  est scalaire. Ainsi  $C = D + N$  est la décomposition de Dunford ; par unicité, c'est la seule.

## 14 Puissances par le binôme

★★★

$D = 2I$  commute avec  $N$  et  $N^2 = 0$ , donc  $C^k = (2I + N)^k = 2^k I + k 2^{k-1} N$ .

Pour  $k = 5$  :  $C^5 = 32I + 80N = \begin{pmatrix} 32 - 80 & -80 \\ 80 & 32 + 80 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -48 & -80 \\ 80 & 112 \end{pmatrix}$ .

## 15 Une suite récurrente linéaire

★★★

On a  $\begin{pmatrix} u_{n+1} \\ u_n \end{pmatrix} = A^n \begin{pmatrix} u_1 \\ u_0 \end{pmatrix}$ .  $\chi_A = X^2 - 5X + 6 = (X - 2)(X - 3)$ , donc  $A$  est diagonalisable, de vecteurs propres  $(2, 1)$  pour 2 et  $(3, 1)$  pour 3.

Ainsi  $u_n = \alpha 2^n + \beta 3^n$ . Les conditions  $\alpha + \beta = 1$  et  $2\alpha + 3\beta = 4$  donnent  $\beta = 2, \alpha = -1$  :  $u_n = 2 \cdot 3^n - 2^n$ . Vérification :  $u_2 = 18 - 4 = 14 = 5 \cdot 4 - 6 \cdot 1$ .

### 16 Forme de Jordan d'une matrice 3x3

★★★

$$N = G - I = \begin{pmatrix} -1 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ 1 & -1 & 1 \end{pmatrix}. \text{ On calcule } N^2 = \begin{pmatrix} 1 & -1 & 1 \\ 1 & -1 & 1 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}, \text{ de rang } 1, \text{ et } N^3 = 0.$$

Donc  $N$  est nilpotent, la seule valeur propre de  $G$  est 1 et  $\chi_G = (X - 1)^3$ ; de plus  $\mu_G = (X - 1)^3$ .

Un bloc de taille 3 : on prend  $v = e_1$  (car  $N^2 e_1 \neq 0$ ). Alors  $Nv = (-1, 0, 1)$ ,

$N^2 v = (1, 1, 0)$ . Dans la base  $(w_1, w_2, w_3) = (N^2 v, Nv, v)$ , on a  $Gw_1 = w_1$ ,

$$Gw_2 = w_2 + w_1, Gw_3 = w_3 + w_2. \text{ Avec } P = \begin{pmatrix} 1 & -1 & 1 \\ 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \end{pmatrix}, P^{-1}GP = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}.$$

### 17 Reconstituer la forme de Jordan d'un nilpotent

★★★

Nombre de blocs de taille au moins  $k$  :  $k = 1 : 2$  ;  $k = 2 : 4 - 2 = 2$  ;  $k = 3 : 5 - 4 = 1$  ;  
 $k = 4 : 5 - 5 = 0$ . Il y a donc 2 blocs, 2 de taille  $\geq 2$ , 1 de taille  $\geq 3$  : les blocs sont de  
 tailles 3 et 2, soit  $N \sim J_3(0) \oplus J_2(0)$  ( $3 + 2 = 5$ ).

Le plus grand bloc est de taille 3, donc  $\mu_N = X^3$ . Rangs :  $\text{rg } N = 5 - 2 = 3$ ,  
 $\text{rg } N^2 = 5 - 4 = 1, \text{rg } N^3 = 0$ .

### 18 Dunford d'une matrice 3x3

★★★

$\chi_M = (X - 2)^2(X + 1)$ . Les polynômes  $(X - 2)^2$  et  $X + 1$  sont premiers entre eux :

$$(X - 2)^2 - (X - 5)(X + 1) = X^2 - 4X + 4 - X^2 + 4X + 5 = 9, \text{ donc}$$

$$\frac{1}{9}(X - 2)^2 \cdot 1 - \frac{1}{9}(X - 5)(X + 1) = 1 \text{ et le projecteur sur } \ker(M + I) \text{ est}$$

$$\pi = \frac{1}{9}(M - 2I)^2.$$

$$\text{On calcule } M - 2I = \begin{pmatrix} -1 & 1 & 0 \\ -1 & 1 & 0 \\ -1 & 4 & -3 \end{pmatrix} \text{ puis } (M - 2I)^2 = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & -9 & 9 \end{pmatrix}, \text{ donc}$$

$$\pi = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 1 \end{pmatrix}.$$

$$\text{La partie diagonalisable est } D = 2(I - \pi) + (-1)\pi = 2I - 3\pi = \begin{pmatrix} 2 & 0 & 0 \\ 0 & 2 & 0 \\ 0 & 3 & -1 \end{pmatrix} \text{ et}$$

$$N = M - D = \begin{pmatrix} -1 & 1 & 0 \\ -1 & 1 & 0 \\ -1 & 1 & 0 \end{pmatrix}, \text{ avec } N^2 = 0 \text{ et } DN = ND.$$

### 19 Réduction sur R et sur C

★★★

$$R^2 = \begin{pmatrix} -1 & 1 \\ -1 & 0 \end{pmatrix}, \text{ donc } R^2 + R + I = \begin{pmatrix} -1 + 0 + 1 & 1 - 1 + 0 \\ -1 + 1 + 0 & 0 - 1 + 1 \end{pmatrix} = 0. \text{ Alors}$$

$$R^3 - I = (R - I)(R^2 + R + I) = 0.$$

$\chi_R = X^2 + X + 1$  (trace  $-1$ , déterminant  $1$ ) n'a pas de racine réelle :  $R$  n'est pas trigonalisable, donc pas diagonalisable sur  $\mathbb{R}$ . Sur  $\mathbb{C}$ ,  $\chi_R$  a deux racines distinctes  $j$  et  $j^2$  (racines cubiques non triviales de  $1$ ) :  $R$  est diagonalisable sur  $\mathbb{C}$ .

$$\text{Comme } R^3 = I \text{ et } 2026 = 3 \times 675 + 1, R^{2026} = R = \begin{pmatrix} 0 & -1 \\ 1 & -1 \end{pmatrix}.$$

20

## Classer les endomorphismes avec $A^3 = A^2$

★★★

$X^3 - X^2 = X^2(X - 1)$  annule  $A$ , donc  $\mu_A$  divise  $X^2(X - 1)$  : les valeurs propres sont dans  $\{0, 1\}$ , et le bloc de  $0$  est de taille au plus  $2$ .  $\text{rg } A = 2$  donne  $\dim \ker A = 1$  : un seul bloc de valeur propre  $0$ , de taille  $m_0 \in \{1, 2\}$  (et  $m_0 \geq 1$  car  $A$  n'est pas inversible).

Si  $m_0 = 1 : m_1 = 2$ , et  $A - I$  annule la partie de valeur propre  $1$  (annulateur  $X(X - 1)$  à racines simples sur ce bloc) :  $A \sim \text{diag}(0, 1, 1)$ . Si  $m_0 = 2$  : le bloc de  $0$  est  $J_2(0)$ , et  $m_1 = 1$  :  $A \sim J_2(0) \oplus (1)$ .

Les deux cas existent :  $\text{diag}(0, 1, 1)$  est de rang  $2$  et vérifie  $A^3 = A^2$  ; pour  $J_2(0) \oplus (1)$ , le carré de  $J_2(0)$  est nul, donc  $A^2 = 0 \oplus (1) = A^3$ , et le rang vaut  $1 + 1 = 2$ .

### Le livre d'exercices corrigés de maths Licence L3

Tout le programme en un seul PDF de 126 pages, à imprimer ou à garder sur ta tablette.

[Voir le livre](#)

### Zyro te conseille la suite

#### Exercices de maths

Réduction des endomorphismes :  
exercices de maths Licence L3

#### QCM de maths

Réduction des endomorphismes : QCM  
de maths Licence L3



### Contrôles de maths

Réduction des endomorphismes :  
contrôle de maths Licence L3



### Exercices de maths

Groupes, anneaux et corps : exercices de  
maths Licence L3



### Exercices de maths

Topologie des espaces métriques :  
exercices de maths Licence L3



### QCM de maths

Groupes, anneaux et corps : QCM de  
maths Licence L3

**Zyro vous emmène sur nos sites partenaires**

Embarquez pour d'autres planètes du savoir et leurs applis.

Décollage